Éléments de réflexion | Pistes de recherche

Les éléments développés ci-après ne sont souvent que des indications pour aboutir à la solution, qui détaillent la plupart du temps un cheminement à suivre pour montrer le rèsultat demandé. La plupart des calculs sont laissés aux lecteurs. . .La mise en forme de certains calculs est faite de sorte à économiser de l'espace et donc du papier, mais il conviendrait de ne pas les écrire en ligne notamment comme cela l'est parfois.

Un peu de technique

EX. 1 | Réf. 2325

La famille $\mathcal{F} = (u_1, \ldots, u_4)$ de $\mathbb{R}^4$ formée des vecteurs $u_1 = (1,1,1,1)$, $u_2\,(3,1,3,1)$, $u_3 = (3,-1,-1,3)$ et $u_4 = (2,5,4,3)$ est-elle une famille libre de $\mathbb{R}^4$? Déterminer le cas échéant une relation de dépendance entre ces quatre vecteurs.

EX. 1 | Éléments de correction | Réf. 2325

On commence par déterminer le nombre de pivots de la matrice associée à cette famille de vecteurs par échelonnement :

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 5 \\ 1 & 3 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & 3 & 3 \end{pmatrix} \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 1L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 1L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 1L_1}}{\sim_L} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & -4 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\underset{L_4 \leftarrow L_4 - 1L_2}{\sim_L} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & -2 \end{pmatrix} \underset{L_4 \leftarrow L_4 + 1L_3}{\sim_L} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Il y a donc 3 pivots non nuls. La famille $\mathcal{F}$ étant constituée de 4 vecteurs, elle ne peut donc être libre.
Il existe donc quatre réels λ_1, λ_2, λ_3 et λ_4 tels que $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 + \lambda_4 u_4 = 0_4$, ces derniers étant alors solution du système de représentation matricielle $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 3 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 5 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 3 & 0 \end{array}\right)$

Le système est compatible puisque c'est un système homogène et on poursuit l'échelonnement déjà commencé :

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & -4 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 1L_3 \\ L_1 \leftarrow L_1 + \frac{3}{4}L_3}}{\sim_L} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 0 & \frac{7}{2} & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\underset{L_1 \leftarrow L_1 + \frac{3}{2}L_2}{\sim_L} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \underset{\substack{L_2 \leftarrow -\frac{1}{2}L_2 \\ L_3 \leftarrow -\frac{1}{4}L_3}}{\sim_L} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

On en déduit les relations :

$$\begin{cases} \lambda_1 = -5\lambda_4 \\ \lambda_2 = \dfrac{1}{2}\lambda_4 \\ \lambda_3 = \dfrac{1}{2}\lambda_4 \end{cases}$$

D'où : $-5\lambda_4 u_1 + \dfrac{1}{2}\lambda_4 u_2 + \dfrac{1}{2}\lambda_4 u3 + \lambda_4 u_4 = 0_4$ pour tout $\lambda_4 \in \mathbb{R}$.
Ainsi, pour $\lambda_4 = 2$, on obtient : $-10u_1 + u_2 + u_3 + 2u_4 = 0_4$.

EX. 2 | Réf. 2326

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite donnée par les relations : $\begin{cases} u_0 = 4 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = -\dfrac{1}{u_n + 2} \end{cases}$

1. Montrer par récurrence sur $n \geq 1$, que u_n est bien défini et $-1 < u_n < 0$.

2. On considère alors la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donnée par la relation $v_n = \dfrac{1}{u_n + 1}$.

- **a.** Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et arithmétique.
- **b.** Exprimer v_n en fonction de n, puis u_n en fonction de n.

EX. 2 | Éléments de correction | Réf. 2326

1. Pour $n \geq 1$, on note $\mathcal{P}(n)$ l'assertion : $\mathcal{P}()$: « u_n est bien défini et $-1 < u_n < 0$ »
Montrons par récurrence sur $n \geq 1$, que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout n≥ 1.

Initialisation : $u_0 = 4$, donc $u_0 + 2 \neq 0$ et le quotient $\dfrac{1}{u_0+2}$ existe donc. Par suite u_1 est bien défini.

Par ailleurs, puisque $u_0 = 4$, il vient que $u_1 = -\dfrac{1}{4+2} = -\dfrac{1}{6} \in \left]-1;0\right[$ et donc $-1 < u_1 < 0$. Donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

Hérédité : soit $n \geq 1$. Supposons que l'on a $\mathcal{P}(n)$, à savoir u_n est bien défini et $-1 < u_n < 0$, et montrons, sous cette hypothèse que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie, à savoir u_{n+1} est bien défini et $-1 < u_{n+1} < 0$.

Puisque par hypothèse de récurrence $-1 < u_n < 0$, $u_n + 2 \neq 0$ et le quotient $\dfrac{1}{u_n+2}$ est bien défini et ainsi u_{n+1} est bien défini.

Par ailleurs puisque $-1 < u_n < 0$, on a $1 < u_n + 2 < 2$ donc en passant à l'inverse $\dfrac{1}{2} < \dfrac{1}{u_n+2} < 1$ et en prenant l'opposé, il vient $-1 < -\dfrac{1}{u_n+2} < -\dfrac{1}{2}$, c'est à dire $-1 < u_{n+1} < -\dfrac{1}{2}$. Or $-\dfrac{1}{2} < 0$, et ainsi $-1 < u_{n+1} < 0$.
On a donc bien $\mathcal{P}(n+1)$.

Conclusion : la propriété $\mathcal{P}(n)$ étant vraie au rang 1 et héréditaire, elle est donc vraie pour tout entier $n \geq 1$.

2. a. Puisque pour tout $n \geq 1$, on a $-1 < u_n < 0$ et que $u_0 = 4$, il est immédiat que pour tout entier n, $u_n + 1 \neq 0$ et par suite le quotient $\dfrac{1}{u_n+1}$ est bien défini. Par conséquent, la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie.

Par ailleurs, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \frac{1}{u_{n+1}+1} - \frac{1}{u_n+1} \\ &= \frac{1}{-\dfrac{1}{u_n+2}+1} - \frac{1}{u_n+1} \\ &= \frac{1}{\dfrac{-1+u_n+2}{u_n+2}} - \frac{1}{u_n+1} \\ &= \frac{u_n+2}{u_n+1} - \frac{1}{u_n+1} \\ &= \frac{u_n+1}{u_n+1} + \frac{1}{u_n+1} - \frac{1}{u_n+1} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Par conséquent, la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique de raison 1 et de premier terme $v_0 = \dfrac{1}{u_0+1} = \dfrac{1}{5}$.

b. Il vient alors : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = \dfrac{1}{5} + n$.

Par ailleurs, puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$,$v_n = \dfrac{1}{u_n+1}$, il vient $u_n = \dfrac{1}{v_n} - 1$ et par suite, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{1}{\dfrac{1}{5}+n} - 1 = \ldots \dfrac{4-5n}{1+5n}$

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

EX. 3 | Réf. 2323

On définit la suite $(p_n)_{n\geq 3}$ par : $\forall n \geq 3, \quad p_n = \dfrac{\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k!}{n!}$

1. Soit $n \geq 3$. Montrer que pour tout $k \in [\![0; n-2]\!]$, $\dfrac{k!}{n!} \leq \dfrac{1}{n(n-1)}$.
2. En déduire un encadrement de p_n pour tout $n \geq 3$.
3. Déterminer alors la limite de $(p_n)_{n\geq 3}$.

EX. 3 | Éléments de correction | Réf. 2323

1. Pour tout $k \in [\![0; n-2]\!]$, puisque $0 \leq k \leq n-2$, on aura $k! \leq (n-2)!$. Donc $\dfrac{k!}{n!} \leq \dfrac{(n-2)!}{n!}$. Or $\dfrac{(n-2)!}{n!} = \dfrac{1}{n(n-1)}$ et par suite, il vient $\dfrac{k!}{n!} \leq \dfrac{1}{n(n-1)}$.

2. Pour $n \geq 3$, on a donc $\dfrac{\sum_{k=0}^{n} k!}{n!} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{k!}{n!} = \sum_{k=0}^{n-2} \frac{k!}{n!} + \sum_{k=n-1}^{n} \frac{k!}{n!} \leq \sum_{k=0}^{n-2} n\frac{1}{n(n-1)} + \frac{(n-1)!}{n!} + \frac{n!}{n!}$

Or $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-2} \frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{n(n-1)} \times (n-2+1) = \frac{1}{n}$.

Ainsi, il vient $p_n \leq \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n} + 1$ ce qui donne $p_n \leq 1 + \dfrac{2}{n}$.

Par ailleurs, $p_n = \underbrace{\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{k!}{n!}} \geq 0 + \underbrace{\dfrac{n!}{n!}}_{1}$ et donc $p_n \geq 1$.

Finalement, il vient que pour tout $n \geq 3$, $1 \leq p_n \leq 1 + \dfrac{2}{n}$.

3. Puisque $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} 1 + \frac{2}{n} = 1$, par le théorème d'encadrement, il vient que $p_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 1$.