Éléments de réflexion | Pistes de recherche

Les éléments développés ci-après ne sont souvent que des indications pour aboutir à la solution, qui détaillent la plupart du temps un cheminement à suivre pour montrer le rèsultat demandé. La plupart des calculs sont laissés aux lecteurs. . .La mise en forme de certains calculs est faite de sorte à économiser de l'espace et donc du papier, mais il conviendrait de ne pas les écrire en ligne notamment comme cela l'est parfois.

Travailler les fondamentaux

EX. 1 | Réf. 1596

Dans tout ce qui suit, n désigne un entier naturel non nul. On définit alors une application φ par :

$$\varphi : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] \times \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (P,Q) & \longmapsto & \displaystyle\int_0^1 t^2 P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t \end{array} \right.$$

Montrer que φ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.

EX. 1 | Éléments de correction | Réf. 1596

Caractère symétrique de φ : soit $(P,Q) \in \mathbb{R}_n[X] \times \mathbb{R}_n[X]$. On a directement que :

$$\begin{array}{rcl} \varphi(P,Q) & = & \displaystyle\int_0^1 t^2 P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t \\ & = & \displaystyle\int_0^1 t^2 Q(t)P(t)\,\mathrm{d}t \\ & = & \varphi(Q,P) \end{array}$$

Par suite, φ est symétrique.

Caractère bilinéaire de φ : soit $(P,Q,R) \in \mathbb{R}_n[X] \times \mathbb{R}_n[X] \times \mathbb{R}_n[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a directement que :

$$\begin{array}{rcl} \varphi(\lambda P + Q, R) & = & \displaystyle\int_0^1 t^2 \left[(\lambda P + Q)(t)\right] R(t)\,\mathrm{d}t \\ & = & \displaystyle\int_0^1 t^2 \left(\lambda P(t) + Q(t)\right) R(t)\,\mathrm{d}t \\ & = & \displaystyle\int_0^1 \left(\lambda t^2 P(t)R(t) + Q(t)R(t)\right)\,\mathrm{d}t \\ & \underset{\substack{\text{Linéarité} \\ \text{de l'intégrale}}}{=} & \displaystyle\lambda \int_0^1 t^2 P(t)R(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^1 t^2 Q(t)R(t)\,\mathrm{d}t \\ & = & \lambda\varphi(P,R) + \varphi Q, R \end{array}$$

et ainsi φ est linéaire à gauche. Comme φ est symétrique, on en déduit qu'elle est bilinéaire.

Caractère positif de φ : soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. Par définition de φ, on a : $\varphi(P,P) = \displaystyle\int_0^1 (tP(t))^2\,\mathrm{d}t$.

La fonction $t \longmapsto (tP(t))^2$ est une fonction continue et positive sur $[0;1]$, par positivité de l'intégrale il vient que $\displaystyle\int_0^1 (tP(t))^2\,\mathrm{d}t$ est positif, c'est à dire $\varphi(P,P) \geq 0$ et donc que φ est positif.

Caractère défini de φ : soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $\varphi(P,P) = 0$. Par définition de φ, on a : $\varphi(P,P) = \displaystyle\int_0^1 (tP(t))^2\,\mathrm{d}t$.

La fonction $t \longmapsto (tP(t))^2$ est une fonction continue et positive sur $[0;1]$ d'intégrale nulle sur $[0;1]$, par théorème elle est nulle sur $[0;1]$. Par suite, on en déduit que : $\forall t \in [0;1]\,,\ (tP(t))^2 = 0$, et donc : $\forall t \in [0;1]\ tP(t) = 0$. On a alors : $\forall t \in]0;1]\,,\ P(t) = 0$.

Par conséquent, P est une fonction polynôme de degré au plus n qui possède une infinité de racines sur l'intervalle. Par théorème, P est le polynôme nul. Ainsi, φ est définie.

Conclusion : φ est un application bilinéaire, symétrique, positive et définie, par définition, φ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.

EX. 2 | Réf. 1571

On définit l'application $\langle \bullet \,|\, \bullet \rangle$ sur $\mathbb{R}_2[X] \times \mathbb{R}_2[X]$ par : $\langle \bullet \,|\, \bullet \rangle : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] \times \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (P,Q) & \longmapsto & P(0) \times Q(0) + P'(0) \times Q'(0) + P''(0) \times Q''(0) \end{array} \right.$

et on admet que $\langle \bullet \,|\, \bullet \rangle$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}_2[X]$.

1. Calculer, pour tout couple $(i,j) \in [\![0;2]\!]^2$, le réel $a_{i,j} = \langle X^i \,|\, X^j \rangle$.
2. En déduire une base orthonormale de $\mathbb{R}_2[X]$ pour $\langle \bullet \,|\, \bullet \rangle$.
3. Soit F et G les sous-espaces de $\mathbb{R}_2[X]$ définis par : $F = \text{Vect}\left(1+X, X^2\right)$ et $G = \text{Vect}\,(1-X)$.
   Montrer que F et G sont orthogonaux pour $\langle \bullet \,|\, \bullet \rangle$.

EX. 2 | Éléments de correction | Réf. 1571

1. On a clairement que :

P	P'	P''	$P(0)$	$P'(0)$	$P''(0)$
1	0	0	1	0	0
X	1	0	0	1	0
X^2	$2X$	2	0	0	2

   et par suite :

$$\begin{aligned} \langle 1 \,|\, X \rangle &= 1\times 0 + 0 \times 1 + 0 \times 0 \\ &= 0 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \langle 1 \,|\, X^2 \rangle &= 1\times 0 + 0 \times 0 + 0 \times 2 \\ &= 0 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \langle X \,|\, X^2 \rangle &= 0\times 0 + 1 \times 0 + 0 \times 2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

2. D'après la question précédente, la famille $\left(1, X, X^2\right)$ est une famille orthogonale. Comme on a :

$$\begin{aligned} \langle 1 \,|\, 1 \rangle &= 1\times 1 + 0 \times 0 + 0 \times 0 \\ &= 1 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \langle X \,|\, X \rangle &= 0\times 0 + 1 \times 1 + 0 \times 0 \\ &= 0 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \langle X^2 \,|\, X^2 \rangle &= 0\times 0 + 0 \times 0 + 2 \times 2 \\ &= 4 \end{aligned}$$

   on en déduit que $\|1\| = 1$, $\|X\| = 1$ et $\left\|X^2\right\| = 2$ et par conséquent, que la famille $\left(1, X, \dfrac{1}{2}X^2\right)$ est une famille orthonormée de $\mathbb{R}_2[X]$.

   Par théorème, la famille $\left(1, X, \dfrac{1}{2}X^2\right)$ étant orthogonale, elle est libre.

   Par suite, il s'agit donc d'une famille libre de 3 vecteurs dans $\mathbb{R}_2[X]$ qui est de dimension 3. Par théorème, elle est donc une base de $\mathbb{R}_2[X]$, et donc une base orthonormée de $\mathbb{R}_2[X]$.

3. Puisque $G = \text{Vect}\,(1-X)$ et $F = \text{Vect}\left(1+X, X^2\right)$, on a : $\quad (G \perp F) \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} \langle 1-X \,|\, 1+X \rangle = 0 \\ \langle 1-X \,|\, X^2 \rangle \end{array} \right.$.

   On a clairement que :

P	P'	P''	$P(0)$	$P'(0)$	$P''(0)$
$1-X$	-1	0	1	-1	0
$1+X$	1	0	1	1	0
X^2	$2X$	2	0	0	2

$$\begin{aligned} \langle 1-X \,|\, 1+X \rangle &= 1\times 1 + (-1) \times 1 + 0 \times 0 \\ &= 0 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \langle 1-X \,|\, X^2 \rangle &= 1\times 0 + (-1) \times 0 + 0 \times 2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

   Par conséquent, G et F sont bien orthogonaux pour $\langle \bullet \,|\, \bullet \rangle$.

Préparation à l'oral

EX. 3 | Réf. 1420

Soit E un espace vectoriel muni d'un produit scalaire $\langle \bullet | \bullet \rangle$, de dimension 3, et on suppose que a est un vecteur unitaire de E, et que $k \in \mathbb{R}$. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur k pour que $\varphi : \left| \begin{array}{ccc} E^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (u,v) & \longmapsto & \langle u|v\rangle + k\langle u|a\rangle\langle v|a\rangle \end{array} \right.$ soit un produit scalaire sur E.

EX. 3 | Éléments de correction | Réf. 1420

Il est clair que φ est bilinéaire symétrique. Soit (a, u_1, u_2) une base orthonormale pour $\langle \bullet | \bullet \rangle$. On peut alors écrire ;

$$\varphi(a,a) = \|a\|^2 + k\|a\|^2 = 1 + k, \quad \varphi(u_1,u_1) = \|u_1\|^2, \quad \varphi(u_2,u_2) = \|u_2\|^2$$

et nécessairement $1 + k > 0$.
Si on pose $u = \alpha a + \beta_1 u_1 + \beta_2 u_2$, on a :

$$\varphi(u,u) = \|\alpha a + \beta_1 u_1 + \beta_2 u_2\|^2 + k\left(\langle \alpha a + \beta_1 u_1 + \beta_2 u_2 | a\rangle\right)^2 = \alpha^2(k+1) + \beta_1^2 + \beta_2^2$$

et nous avons l'équivalence : $\varphi(u,u) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = \beta_1 = \beta_2 = 0$.
Finalement, la condition nécessaire et suffisante pour que φ soit un produit scalaire est $k + 1 > 0$.

Mobiliser toutes ses connaissances

EX. 4 | Réf. 1593

Soit $E = \left\{ (x_n)_{n\geq 1} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \text{ la série numérique } \sum_{n\geq 1} x_n^2 \text{ converge} \right\}$.

1. Soit $\left((x_n)_{n\geq 1}, (y_n)_{n\geq 1}\right) \in E \times E$. On définit la suite $(z_n)_{n\geq 1}$ par : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad z_n = x_n + y_n$.
   Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq z_n^2 \leq 2\left(x_n^2 + y_n^2\right)$.
   Qu'en déduire pour $(z_n)_{n\geq 1}$?
2. Montrer que E est un $\mathbb{R}-$espace vectoriel.
3. Soit $\left((x_n)_{n\geq 1}, (y_n)_{n\geq 1}\right) \in E \times E$.
   Montrer que la série numérique $\sum x_n y_n$ est convergente.
4. On définit alors sur E l'application : $\langle \bullet | \bullet \rangle : \left| \begin{array}{ccc} E \times E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \left((x_n)_{n\geq 1}, (y_n)_{n\geq 1}\right) & \longmapsto & \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} x_n y_n \end{array} \right.$
   Montrer que $\langle \bullet | \bullet \rangle$ est un produit scalaire sur E.
5. Montrer que si $(x_n)_{n\geq 1}$ et $(y_n)_{n\geq 1}$ sont des éléments de E, alors : $\left(\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} x_n y_n\right)^2 \leq \left(\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} x_n^2\right)\left(\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} y_n^2\right)$

EX. 4 | Éléments de correction | Réf. 1593

1. Il est immédiat que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \leq z_n^2 \leq x_n^2 + y_n^2 + 2x_n y_n$
   De plus, on sait que : $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, \quad 0 \leq (a-b)^2$.
   Or on a : $\left(0 \leq (a-b)^2\right) \quad \Leftrightarrow \quad \left(2ab \leq a^2 + b^2\right)$
   Par suite, il vient que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 2x_n y_n \leq x_n^2 + y_n^2$
   Ainsi, on en déduit que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \leq z_n^2 \leq 2\left(x_n^2 + y_n^2\right)$
   La série numérique $\sum_{n\geq 1} z_n^2$ est clairement à termes positifs.
   Puisque par hypothèse les deux séries numériques $\sum_{n\geq 1} x_n^2$ et $\sum_{n\geq 1} y_n^2$ sont convergentes, la série numérique $\sum_{n\geq 1} x_n^2 + y_n^2$

est convergente.

Ainsi, le terme général z_n^2 de la série numérique à termes positifs $\sum\limits_{n\geq 1} z_n^2$ est majoré par le terme général d'une série numérique convergente. Par suite, d'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série numérique $\sum\limits_{n\geq 1} z_n^2$ est convergente.

Finalement, on en déduit que $(z_n)_{n\geq 1} \in E$.

2. $E \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ **:** par définition de E.

Le vecteur nul de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ appartient à E : en effet, le vecteur nul de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est la suite nulle. Il est immédiat que la série numérique $\sum\limits_{n\geq 1} 0^2$ est convergente.

Stabilité de E par combinaison linéaire : soient $\left\{\begin{array}{l} (x_n)_{n\geq 1} \in E \\ (y_n)_{n\geq 1} \in E \\ \lambda \in \mathbb{R} \end{array}\right.$.

D'après la première question, la suite $(x_n + y_n)_{n\geq 1}$ est une suite d'élément de E.

Par ailleurs, la suite $(\lambda x_n)_{n\geq 1}$ appartient aussi à E puisque la série numérique $\sum\limits_{n\geq 1} (\lambda x_n)^2$ c'est à dire $\sum\limits_{n\geq 1} \lambda^2 x_n^2$, est de même nature que la série numérique $\sum\limits_{n\geq 1} x_n$ qui est par hypothèse sur $(x_n)_{n\geq 1}$ convergente.

On en déduit donc que E est stable par combinaison linéaire.

Ainsi, E est bien un $\mathbb{R}-$espace vectoriel.

3. D'après la première question on a : $\forall n \geq 1, \quad 0 \leq \underbrace{|x_n|\,|y_n|}_{=|x_n y_n|} \leq 2\left(|x_n|^2 + |y_n|^2\right)$

C'est à dire : $\forall n \geq 1, \quad 0 \leq |x_n y_n| \leq 2\left(x_n^2 + y_n^2\right)$

Puisque par hypothèse les deux séries numériques $\sum\limits_{n\geq 1} x_n^2$ et $\sum\limits_{n\geq 1} y_n^2$ sont convergentes, la série numérique $\sum\limits_{n\geq 1} x_n^2 + y_n^2$ est convergente.

Ainsi, le terme général $|x_n y_n|$ de la série numérique à termes positifs $\sum\limits_{n\geq 1} |x_n y_n|$ est majoré par le terme général d'une série numérique convergente. Par suite, d'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série numérique $\sum\limits_{n\geq 1} |x_n y_n|$ est convergente.

On en déduit donc que la série $\sum\limits_{n\geq 1} x_n y_n$ est absolument convergente, donc convergente.

4. Caractère symétrique de $\langle \bullet | \bullet \rangle$: soient $\left\{\begin{array}{l} (x_n)_{n\geq 1} \in E \\ (y_n)_{n\geq 1} \in E \end{array}\right.$.

Les séries numériques $\sum\limits_{n\geq 1} x_n y_n$ et $\sum\limits_{n\geq 1} y_n x_n$ sont convergentes d'après la question précédente et leurs sommes sont égales puisque la multiplication est commutative dans $\mathbb{R}$.

Ainsi, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} x_n y_n = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} y_n x_n$, et on a bien $\left\langle (x_n)_{n\geq 1} \middle| (y_n)_{n\geq 1} \right\rangle = \left\langle (y_n)_{n\geq 1} \middle| (x_n)_{n\geq 1} \right\rangle$.

Caractère bilinéaire de $\langle \bullet | \bullet \rangle$: soient $\left\{\begin{array}{l} (x_n)_{n\geq 1} \in E \\ (y_n)_{n\geq 1} \in E \\ (z_n)_{n\geq 1} \in E \\ \lambda \in \mathbb{R} \end{array}\right.$.

D'après la question précédente, les séries $\sum\limits_{n\geq 1} x_n z_n$ et $\sum\limits_{n\geq 1} y_n z_n$ sont convergentes.

Ainsi, la série $\sum\limits_{n\geq 1} (\lambda x_n + y_n) z_n$, c'est à dire $\sum\limits_{n\geq 1} (\lambda x_n z_n + y_n z_n)$, est convergente et sa somme est telle que :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (\lambda x_n + y_n) z_n = \lambda \sum_{n=1}^{+\infty} x_n z_n + \sum_{n=1}^{+\infty} y_n z_n.$$

On en déduit donc que : $\left\langle (\lambda x_n + y_n)_{n\geq 1} \middle| (z_n)_{n\geq 1} \right\rangle = \lambda \left\langle (x_n)_{n\geq 1} \middle| (z_n)_{n\geq 1} \right\rangle + \left\langle (y_n)_{n\geq 1} \middle| (z_n)_{n\geq 1} \right\rangle$.

Ainsi, on en déduit que $\langle \bullet \,|\bullet \rangle$ est linéaire à gauche et comme il est symétrique, il est linéaire à droite.
Par conséquent, $\langle \bullet \,|\bullet \rangle$ et bilinéaire.

Caractère positif de $\langle \bullet \,|\bullet \rangle$: soit $(x_n)_{n\geq 1} \in E$.

Par définition, $\left\langle (x_n)_{n\geq 1} \middle| (x_n)_{n\geq 1} \right\rangle = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} x_n^2$, c'est à dire que $\left\langle (x_n)_{n\geq 1} \middle| (x_n)_{n\geq 1} \right\rangle$ est la somme d'une série à termes positifs, qui est positive.

Ainsi, on en déduit que $\left\langle (x_n)_{n\geq 1} \middle| (x_n)_{n\geq 1} \right\rangle \geq 0$ et $\langle \bullet \,|\bullet \rangle$ est positif.

Caractère définie de $\langle \bullet \,|\bullet \rangle$: si $(x_n)_{n\geq 1} \in E$ est la suite nulle, il est immédiat que la somme de la série numérique $\displaystyle\sum_{n\geq 1} x_n^2$ est nulle et donc que $\left\langle (x_n)_{n\geq 1} \middle| (x_n)_{n\geq 1} \right\rangle = 0$.

Soit alors $(x_n)_{n\geq 1} \in E$ tel que $\left\langle (x_n)_{n\geq 1} \middle| (x_n)_{n\geq 1} \right\rangle = 0$, c'est à dire tel que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2 = 0$.

On en déduit donc que : $\quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad x_n^2 = 0$, c'est à dire que $x_n = 0$.
Ainsi, $(x_n)_{n\geq 1}$ est la suite nulle.
En conclusion, $\langle \bullet \,|\bullet \rangle$ est bien définie.

Ainsi, $\langle \bullet \,|\bullet \rangle$ est une symétrique, bilinéaire, positive et définie. C'est donc un produit scalaire sur E.

5. Soient $\begin{cases} (x_n)_{n\geq 1} \in E \\ (y_n)_{n\geq 1} \in E \end{cases}$.

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a : $\quad \left| \left\langle (x_n)_{n\geq 1} \middle| (y_n)_{n\geq 1} \right\rangle \right| \leq \left\| (x_n)_{n\geq 1} \right\| \left\| (y_n)_{n\geq 1} \right\|$

Or on a : $\quad \begin{aligned} \left\| (x_n)_{n\geq 1} \right\|^2 &= \left\langle (x_n)_{n\geq 1} \middle| (x_n)_{n\geq 1} \right\rangle \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} x_n^2 \end{aligned}$

et on a : $\quad \begin{aligned} \left\| (y_n)_{n\geq 1} \right\|^2 &= \left\langle (y_n)_{n\geq 1} \middle| (y_n)_{n\geq 1} \right\rangle \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} y_n^2 \end{aligned}$

avec aussi : $\quad \left\langle (x_n)_{n\geq 1} \middle| (y_n)_{n\geq 1} \right\rangle = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} x_n y_n$ par définition.

Ainsi, on a : $\quad \left| \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} x_n y_n \right| \leq \sqrt{\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} x_n^2} \sqrt{\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} y_n^2}$

c'est à dire que : $\left(\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} x_n y_n \right)^2 \leq \left(\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} x_n^2 \right) \left(\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} y_n^2 \right)$.

Pour s'occuper les jours de pluies

EX. 5 | Réf. 0881

On munit $\mathbb{R}^3$ de sa structure euclidienne orientée canonique.
Soit $\overrightarrow{a} \in \mathbb{R}^3$ non nul. On définit alors l'application φ :

$$\varphi : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ \overrightarrow{x} & \longmapsto & \overrightarrow{a} \wedge \left(\overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{x}\right) \end{array} \right.$$

1. Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer la matrice de φ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ pour $\overrightarrow{a} = (a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$.
   On pourra admettre que : $\quad \forall \left(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}\right) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3, \quad \overrightarrow{a} \wedge \left(\overrightarrow{b} \wedge \overrightarrow{c}\right) = \left\langle \overrightarrow{a} \middle| \overrightarrow{c} \right\rangle \overrightarrow{b} - \left\langle \overrightarrow{a} \middle| \overrightarrow{b} \right\rangle \overrightarrow{c}$
3. Montrer que φ est diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

4. Montrer que $\overrightarrow{a}$ est un vecteur propre pour φ et en donner la valeur propre associée.
5. Montrer que $-\left\|\overrightarrow{a}\right\|^2$ est une valeur propre de φ et caractériser le sous-espace propre associé. Donner alors tous les sous-espaces propres de φ.
6. On suppose dans cette question que $\left\|\overrightarrow{a}\right\| = 1$.
   a. Montrer que l'on a $\varphi \circ \varphi = -\varphi$.
   b. Caractériser géométriquement φ.

EX. 5 | Éléments de correction | Réf. 0881

1. Soient $\begin{cases} \overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^3 \\ \overrightarrow{y} \in \mathbb{R}^3 \\ \lambda \in \mathbb{R} \end{cases}$. On pose $\overrightarrow{w} = \lambda\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}$.

   On a alors :
$$\begin{aligned} \varphi\left(\overrightarrow{w}\right) &= \overrightarrow{a} \wedge \left(\overrightarrow{a} \wedge \left(\lambda\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}\right)\right) \\ &\underset{\text{Linéarité à droite de } \wedge}{=} \overrightarrow{a} \wedge \left(\lambda\overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{x} + \overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{y}\right) \\ &\underset{\text{Linéarité à droite de } \wedge}{=} \lambda\overrightarrow{a} \wedge \left(\overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{x}\right) + \overrightarrow{a} \wedge \left(\overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{y}\right) \\ &= \lambda\varphi\left(\overrightarrow{x}\right) + \varphi\left(\overrightarrow{y}\right) \end{aligned}$$

   Ainsi, φ est linéaire. Comme $\varphi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, on en déduit que $\varphi \in \mathcal{L}\left(\mathbb{R}^3\right)$.

2. En notant $\mathcal{B} = \left(\overrightarrow{e_1}, \ldots, \overrightarrow{e_3}\right)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$, on a :

$$\begin{aligned} \varphi\left(\overrightarrow{e_1}\right) &= \left\langle \overrightarrow{a} \middle| \overrightarrow{e_1} \right\rangle \overrightarrow{a} - \left\langle \overrightarrow{a} \middle| \overrightarrow{a} \right\rangle \overrightarrow{e_1} \\ &= \left\langle \overrightarrow{a} \middle| \overrightarrow{e_1} \right\rangle \overrightarrow{a} - \left\|\overrightarrow{a}\right\|^2 \overrightarrow{e_1} \\ &= a_1\overrightarrow{a} - \left(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2\right)\overrightarrow{e_1} \\ &= \left(a_1^2, a_1a_2, a_1a_3\right) - \left(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2, 0, 0\right) \\ &= \left(-a_2^2 - a_3^2, a_1a_2, a_1a_3\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi\left(\overrightarrow{e_2}\right) &= \left\langle \overrightarrow{a} \middle| \overrightarrow{e_2} \right\rangle \overrightarrow{a} - \left\langle \overrightarrow{a} \middle| \overrightarrow{a} \right\rangle \overrightarrow{e_2} \\ &= \left\langle \overrightarrow{a} \middle| \overrightarrow{e_2} \right\rangle \overrightarrow{a} - \left\|\overrightarrow{a}\right\|^2 \overrightarrow{e_2} \\ &= a_2\overrightarrow{a} - \left(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2\right)\overrightarrow{e_2} \\ &= \left(a_1a_2, a_2^2, a_2a_3\right) - \left(0, a_1^2 + a_2^2 + a_3^2, 0\right) \\ &= \left(a_1a_2, -a_1^2 - a_3^2, a_2a_3\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi\left(\overrightarrow{e_3}\right) &= \left\langle \overrightarrow{a} \middle| \overrightarrow{e_3} \right\rangle \overrightarrow{a} - \left\langle \overrightarrow{a} \middle| \overrightarrow{a} \right\rangle \overrightarrow{e_3} \\ &= \left\langle \overrightarrow{a} \middle| \overrightarrow{e_3} \right\rangle \overrightarrow{a} - \left\|\overrightarrow{a}\right\|^2 \overrightarrow{e_3} \\ &= a_3\overrightarrow{a} - \left(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2\right)\overrightarrow{e_3} \\ &= \left(a_1a_3, a_2a_3, a_3^2\right) - \left(0, 0, a_1^2 + a_2^2 + a_3^2\right) \\ &= \left(a_1a_3, a_2a_3, -a_1^2 - a_2^2\right) \end{aligned}$$

   On en déduit que : $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} -a_2^2 - a_3^2 & a_1a_2 & a_1a_3 \\ a_1a_2 & -a_1^2 - a_3^2 & a_2a_3 \\ a_1a_3 & a_2a_3 & -a_1^2 - a_2^2 \end{pmatrix}$

3. La matrice de φ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ étant symétrique réelle, on sait que cette dernière est diagonalisable sur $\mathbb{R}$. On en déduit donc qu'il existe une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de φ est diagonale, c'est à dire que φ est diagonalisable dans $\mathbb{R}$.

4. On a directement que :
$$\begin{aligned} \varphi\left(\overrightarrow{a}\right) &= \left\langle \overrightarrow{a} \middle| \overrightarrow{a} \right\rangle \overrightarrow{a} - \left\|\overrightarrow{a}\right\|^2 \overrightarrow{a} \\ &= \left\|\overrightarrow{a}\right\|^2 \overrightarrow{a} - \left\|\overrightarrow{a}\right\|^2 \overrightarrow{a} \\ &= \overrightarrow{0} \end{aligned}$$

   Ainsi, $\overrightarrow{a}$ est un vecteur propre de φ associée à la valeur propre 0.

5. En revenant à la définition d'une valeur propre :

$$\begin{aligned}
\left(\begin{array}{c} -\left\|\overrightarrow{a}\right\|^2 \text{ est une} \\ \text{valeur propre de } \varphi \end{array}\right) &\Leftrightarrow \left(, \exists \overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^3, \begin{cases} \overrightarrow{x} \neq \overrightarrow{0} \\ \varphi\left(\overrightarrow{x}\right) = -\left\|\overrightarrow{a}\right\|^2 \overrightarrow{x} \end{cases}\right) \\
&\Leftrightarrow \left(\exists \overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^3, \begin{cases} \overrightarrow{x} \neq \overrightarrow{0} \\ \left\langle \overrightarrow{a} \middle| \overrightarrow{x} \right\rangle \overrightarrow{a} - \left\|\overrightarrow{a}\right\|^2 \overrightarrow{x} = -\left\|\overrightarrow{a}\right\|^2 \overrightarrow{x} \end{cases}\right) \\
&\Leftrightarrow \left(\exists \overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^3, \begin{cases} \overrightarrow{x} \neq \overrightarrow{0} \\ \left\langle \overrightarrow{a} \middle| \overrightarrow{x} \right\rangle \overrightarrow{a} = \overrightarrow{0} \end{cases}\right) \\
&\Leftrightarrow \left(\exists \overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^3, \begin{cases} \overrightarrow{x} \neq \overrightarrow{0} \\ \left\langle \overrightarrow{a} \middle| \overrightarrow{x} \right\rangle = 0 \end{cases}\right) \\
&\Leftrightarrow \left(\exists \overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^3, \begin{cases} \overrightarrow{x} \neq \overrightarrow{0} \\ \overrightarrow{x} \in \left(\mathrm{Vect}\left(\overrightarrow{a}\right)\right)^\perp \end{cases}\right)
\end{aligned}$$

On en déduit donc que $-\left\|\overrightarrow{a}\right\|^2$ est bien une valeur propre de φ et que $E_{-\left\|\overrightarrow{a}\right\|^2}(\varphi) = \left(\mathrm{Vect}\left(\overrightarrow{a}\right)\right)^\perp$.

Puisque $\dim\left(\mathrm{Vect}\left(\overrightarrow{a}\right)\right) = 1$, on en déduit que $\dim\left(E_{-\left\|\overrightarrow{a}\right\|^2}(\varphi)\right) = 2$.

0 étant une autre valeur propre de φ dont le sous-espace propre associé $E_0(\varphi)$ est $\mathrm{Ker}(\varphi)$ contient au moins $\overrightarrow{a}$ donc est de dimension au moins 1, puisque φ est diagonalisable, on a $\dim\left(\mathbb{R}^3\right) \geq \dim\left(\mathrm{Ker}(\varphi)\right) + \dim\left(E_{-\left\|\overrightarrow{a}\right\|^2}(\varphi)\right)$, il ne peut y avoir d'autres valeurs propres et donc que $\dim\left(\mathrm{Ker}(\varphi)\right) = 1$ c'est à dire que $E_0(\varphi) = \mathrm{Vect}\left(\overrightarrow{a}\right)$.

6. a. Soit $\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^3$.

Tout d'abord, il vient que : $\varphi\left(\overrightarrow{x}\right) = \left\langle \overrightarrow{a} \middle| \overrightarrow{x} \right\rangle \overrightarrow{a} - \overrightarrow{x}$.

On a par ailleurs :
$$\begin{aligned}
\varphi\left(\varphi\left(\overrightarrow{x}\right)\right) &= \left\langle \overrightarrow{a} \middle| \varphi\left(\overrightarrow{x}\right) \right\rangle \overrightarrow{a} - \left\|\overrightarrow{a}\right\|^2 \varphi\left(\overrightarrow{x}\right) \\
&= \left\langle \overrightarrow{a} \middle| \left\langle \overrightarrow{a} \middle| \overrightarrow{x} \right\rangle \overrightarrow{a} - \left\|\overrightarrow{a}\right\|^2 \overrightarrow{x} \right\rangle - \left\|\overrightarrow{a}\right\|^2 \left(\left\langle \overrightarrow{a} \middle| \overrightarrow{x} \right\rangle \overrightarrow{a} - \left\|\overrightarrow{a}\right\|^2 \overrightarrow{x}\right) \\
&= \left\langle \overrightarrow{a} \middle| \overrightarrow{x} \right\rangle \left\langle \overrightarrow{a} \middle| \overrightarrow{a} \right\rangle - \left\|\overrightarrow{a}\right\|^2 \left\langle \overrightarrow{a} \middle| \overrightarrow{x} \right\rangle - \left\|\overrightarrow{a}\right\|^2 \left\langle \overrightarrow{a} \middle| \overrightarrow{x} \right\rangle \overrightarrow{a} + \left\|\overrightarrow{a}\right\|^4 \overrightarrow{x} \\
&= \overrightarrow{x} - \left\langle \overrightarrow{a} \middle| \overrightarrow{x} \right\rangle \overrightarrow{a} \\
&= -\varphi\left(\overrightarrow{x}\right)
\end{aligned}$$

Ainsi, $\varphi \circ \varphi = -\varphi$.

b. On remarque dans un premier temps que :
$$\begin{aligned}
(-\varphi) \circ (-\varphi) &= \varphi \circ \varphi \\
&= -\varphi
\end{aligned}$$

Par conséquent, d'après la caractérisation des projecteurs par la composition, puisque $-\varphi$ est aussi un endomorphisme, il vient que $-\varphi$ est un projecteur.
De plus, puisque $\left\|\overrightarrow{a}\right\| = 1$, l'application $\Psi : x \longmapsto \left\langle \overrightarrow{a} \middle| \overrightarrow{x} \right\rangle \overrightarrow{a}$ est la projection orthogonale sur $\mathrm{Vect}\left(\overrightarrow{a}\right)$.

Ainsi, la projection orthogonale sur $\left(\mathrm{Vect}\left(\overrightarrow{a}\right)\right)^\perp$ est alors l'application $x \longmapsto \overrightarrow{x} - \Psi\left(\overrightarrow{x}\right)$.

Or on a : $\forall \overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^3, \quad (-\varphi)\left(\overrightarrow{x}\right) = \overrightarrow{x} - \Psi\left(\overrightarrow{x}\right)$.

Ainsi, $-\varphi$ est la projection orthogonale sur $\left(\mathrm{Vect}\left(\overrightarrow{a}\right)\right)^\perp$ et par conséquent, φ est l'opposé de cette projection.