Éléments de réflexion | Pistes de recherche

Les éléments développés ci-après ne sont souvent que des indications pour aboutir à la solution, qui détaillent la plupart du temps un cheminement à suivre pour montrer le rèsultat demandé. La plupart des calculs sont laissés aux lecteurs. . .La mise en forme de certains calculs est faite de sorte à économiser de l'espace et donc du papier, mais il conviendrait de ne pas les écrire en ligne notamment comme cela l'est parfois.

Je m'entraîne à rédiger

EX. 1 | Réf. 4385

$(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ désigne un espace probabilisé.
Soit X une variable aléatoire réelle discrète définie sur Ω telle que $X(\Omega) = \mathbb{N}$.
On suppose que la loi de X est donnée par la relation : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad 3\mathbb{P}([X = n+2]) = 4\mathbb{P}([X = n+1]) - \mathbb{P}([X = n])$

1. Démontrer qu'il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}([X = n]) = \alpha + \beta \times \left(\dfrac{1}{3}\right)^n$.
2. Déterminer (α, β) et expliciter alors la loi de X.
3. Déterminer la loi de la variable aléatoire $Y = X + 1$.
4. En déduire que X admet une espérance et une variance et en donner leurs valeurs.

EX. 1 | Éléments de correction | Réf. 4385

1. On définit la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad p_n = \mathbb{P}([X = n])$.
La suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc une suite récurrente linéaire d'ordre 2.
L'équation caractértistique associée à cette dernière est l'équation $3r^2 - 4r + r = 0$ d'inconnue r, qui admet deux solutions $r_1 = 1$ et $r_2 = \dfrac{1}{3}$.
Par suite, il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad p_n = \alpha(1)^2 + \beta \times \left(\dfrac{1}{3}\right)^n$
Finalement : $\exists (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, \quad \mathbb{P}([X = n]) = \alpha + \beta \times \left(\dfrac{1}{3}\right)^n$.
2. Puisque X est une variable aléatoire discrète, on doit avoir :
$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, \mathbb{P}([X = n]) \geq 0 \\ \text{La série numérique } \sum \mathbb{P}([X = n]) \text{ est convergente et a pour somme } 1 \end{cases}.$$
Soit alors $N \in \mathbb{N}$. On a :
$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{N} \mathbb{P}([X = n]) &= \sum_{n=0}^{N} \left(\alpha + \beta \times \left(\frac{1}{3}\right)^n\right) \\ &= \sum_{n=0}^{N} \alpha + \beta \times \sum_{n=0}^{N} \left(\frac{1}{3}\right)^n \\ &= \alpha(N+1) + \beta \times \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{N+1}}{1 - \frac{1}{3}} \end{aligned}$$
Puisque $\left|\dfrac{1}{3}\right| < 1$, on en déduit que $\beta \times \dfrac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{N+1}}{1 - \frac{1}{3}} \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} \beta \times \dfrac{3}{2}$.
Par ailleurs, $\alpha(N+1) \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} \pm\infty$ selon le signe de α.
Par conséquent, la suite des sommes partielles $\left(\displaystyle\sum_{n=0}^{N} \mathbb{P}([X = n])\right)_{N\in\mathbb{N}}$ admet une limite finie si, et seulement si, $\alpha = 0$.
Cette limite est alors égale à $\beta \times \dfrac{3}{2}$.
Sous l'hypothèse $\alpha = 0$, la somme de la série numérique $\sum \mathbb{P}([X = n])$ est donc égale à $\beta \times \dfrac{3}{2}$. Par suite, on doit avoir $\beta = \dfrac{2}{3}$ puisque la somme de la série numérique $\sum \mathbb{P}([X = n])$ est égale à 1.

On en déduit donc que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}([X=n]) = \dfrac{2}{3} \times \left(\dfrac{1}{3}\right)^n$

3. **Support de Y :** puisque $X(\Omega) = \mathbb{N}$, il vient que $Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$ étant donné que $Y = X+1$.

   Loi de Y : soit $k \in \mathbb{N}^*$. On a donc :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{P}([Y=k]) & = & \mathbb{P}([X+1=k]) \\ & = & \mathbb{P}([X=k-1]) \\ & = & \dfrac{2}{3} \times \left(\dfrac{1}{3}\right)^{k-1} \\ & = & \left(1-\dfrac{2}{3}\right)^{k-1} \times \dfrac{2}{3} \end{array}$$

   Reconnaissance de la loi de Y : puisque $Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$, on en déduit alors que Y suit une loi géométrique de paramètre $\dfrac{2}{3}$.

4. Y étant une variable aléatoire qui suit une loi géométrique, elle admet une espérance et une variance qui sont telles que :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{E}(Y) & = & \dfrac{1}{\frac{2}{3}} \\ & = & \dfrac{3}{2} \end{array} \qquad \text{et} \qquad \begin{array}{rcl} \mathbb{V}(Y) & = & \dfrac{1-\frac{2}{3}}{\left(\frac{2}{3}\right)^2} \\ & = & \dfrac{3}{4} \end{array}$$

   Puisque $X = Y-1$ et que Y admet une espérance, par linéarité de l'espérance, X admet un espérance et on a :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{E}(X) & = & \mathbb{E}(Y-1) \\ & = & \mathbb{E}(Y)-1 \\ & = & \dfrac{3}{2}-1 \\ & = & \dfrac{1}{2} \end{array}$$

   De même, Y admettant une variance, X admet une variance et on a : $\begin{array}{rcl} \mathbb{V}(X) & = & \mathbb{V}(Y-1) \\ & = & \mathbb{V}(Y) \\ & = & \dfrac{3}{4} \end{array}$

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

EX. 2 | Réf. 4383

On considère la matrice M définie par : $M = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

Une urne contient une boule rouge et deux boules blanches. On effectue dans cette urne une succession de tirages d'une boule selon le protocole suivant :

- si la boule tirée est rouge, elle est remise dans l'urne.
- si la boule tirée est blanche, elle n'est pas remise dans l'urne.

Pour tout tout entier i supérieur ou égal à 1, on note B_i (respectivement R_i) l'événement « on obtient une boule blanche (respectivement rouge) lors du i^e tirage ».

Pour tout entier n supérieur ou égal à 1, on note X_n le nombre de boules blanches contenues dans l'urne à l'issue du n^e tirage et on pose $X_0 = 2$.

On note enfin T_1 le numéro du tirage où l'on extrait pour la première fois une boule blanche, et T_2 le numéro du tirage où l'on extrait la dernière boule blanche.

On admet qu'il existe un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ permettant de modéliser cette expérience, et que X_n, T_1 et T_2 sont des variables aléatoires définies sur cet espace, et où $\mathcal{P}(\Omega)$ est l'ensemble des parties de Ω, c'est à dire l'ensemble des événements.

On considère les quatre matrices colonnes suivantes :

$$U_n = \begin{pmatrix} \mathbb{P}([X_n = 0]) \\ \mathbb{P}([X_n = 1]) \\ \mathbb{P}([X_n = 2]) \end{pmatrix} \quad V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad V_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad V_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

1. a. Déterminer pour tout entier naturel n, l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire X_n (on distinguera les trois cas $n = 0$, $n = 1$ et $n \geq 2$).

b. En utilisant la formule des probabilités totales, montrer que pour tout entier $n \geq 2$, on a l'égalité suivante :

$$U_{n+1} = MU_n$$

Vérifier que l'égalité précédente reste valable pour $n = 0$ et $n = 1$.

c. Calculer MV_1, MV_2 et MV_3.

d. En déduire par récurrence, pour tout entier naturel n, la relation suivante :

$$U_n = V_1 + 4\left(\frac{1}{2}\right)^n V_2 + \left(\frac{1}{3}\right)^n V_3$$

e. Donner la loi de probabilité de la variable aléatoire X_n.

2. Calculer $E(X_n)$, espérance de X_n, ainsi que sa limite lorsque n tend vers $+\infty$.

3. Reconnaître la loi de T_1.

4. Écrire les événements $[T_2 = 2]$ et $[T_2 = 3]$ à l'aide de certains des événements B_i, et en déduire les valeurs des probabilités $\mathbb{P}([T_2 = 2])$ et $\mathbb{P}([T_2 = 3])$.

5. a. Pour tout entier $n \geq 2$, écrire l'événement $[T_2 = n]$ en fonction des événements $[X_{n-1} = 1]$ et $[X_n = 0]$.

b. En déduire que pour tout entier $n \geq 2$, on a :

$$\mathbb{P}([T_2 = n]) = 2\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right)$$

EX. 2 | Éléments de correction | Réf. 4383

1. a.
- X_0 est la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches présentes dans l'urne à l'instant 0, c'est à dire 2. Ainsi $X_0(\Omega) = \{2\}$.
- X_1 est la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches présentes dans l'urne après le premier tirage. Il en reste donc seulement une au minimum si l'on en a tiré une ou deux si c'est la rouge qui a été tirée, et ainsi $X_1(\Omega) = \{1, 2\}$.
- X_n, pour $n \geq 2$, est la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches présentes dans l'urne après le ne tirage. Le nombre de boules blanches à l'issue du ne tirage dépend clairement du nombre de boules blanches présentes à l'issue du $(n-1)$e tirage. Ainsi, avant le ne tirage, l'urne contient soit 0, soit 1, soit 2 boules blanches. Par conséquent si l'on tire une rouge, il en restera encore 2, et si on tire une blanche, il en restera soit 0 soit 1. En conclusion $X_n(\Omega) = \{0, 1, 2\}$.

b. On a $MU_n = \begin{pmatrix} \mathbb{P}([X_n = 0]) + \frac{1}{2}\mathbb{P}([X_n = 1]) \\ \frac{1}{2}pX_n = 1 + \frac{2}{3}\mathbb{P}([X_n = 2]) \\ \frac{1}{3}\mathbb{P}([X_n = 2]) \end{pmatrix}$

- L'événement $[X_{n+1} = 0]$ ne peut se produire que si $[X_n = 0]$ ou $[X_n = 1]$, et ainsi :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}([X_{n+1} = 0]) &= \mathbb{P}([X_{n+1}] \cap [X_n = 0]) + \mathbb{P}([X_{n+1}] \cap \mathbb{P}([X_n = 1])) \\ &= \mathbb{P}([X_n = 0]) \times \mathbb{P}_{[X_n=0]}(X_{n+1} = 0) + \mathbb{P}([X_n = 1])\, \mathbb{P}_{[X_n=1]}(X_{n+1} = 0) \\ &= \mathbb{P}([X_n = 0]) \times 1 + \mathbb{P}([X_n = 1]) \times \frac{1}{2} \end{aligned}$$

et on retrouve la première ligne du produit MU_n.

- L'événement $[X_{n+1}=1]$ ne peut se produire que si $[X_n=1]$ ou $[X_n=2]$, et ainsi :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left([X_{n+1}=1]\right) &= \mathbb{P}\left([X_{n+1}]\cap[X_n=1]\right)+\mathbb{P}\left([X_{n+1}]\cap\mathbb{P}\left([X_n=2]\right)\right)\\ &= \mathbb{P}\left([X_n=1]\right)\times\mathbb{P}_{[X_n=1]}\left(X_{n+1}=1\right)+\mathbb{P}\left([X_n=2]\right)\mathbb{P}_{[X_n=2]}\left(X_{n+1}=1\right)\\ &= \mathbb{P}\left([X_n=1]\right)\times\frac{1}{2}+\mathbb{P}\left([X_n=2]\right)\times\frac{2}{3}\end{aligned}$$

et on retrouve la deuxième ligne du produit MU_n.

- L'événement $[X_{n+1}=2]$ ne peut se produire que si $[X_n=2]$, et ainsi :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left([X_{n+1}=1]\right) &= \mathbb{P}\left([X_{n+1}]\cap[X_n=2]\right)\\ &= \mathbb{P}\left([X_n=2]\right)\times\mathbb{P}_{[X_n=2]}\left(X_{n+1}=1\right)\\ &= \mathbb{P}\left([X_n=2]\right)\times\frac{1}{3}\end{aligned}$$

et on retrouve la dernière ligne du produit MU_n.

Par suite, on a bien $U_{n+1}=\begin{pmatrix}\mathbb{P}\left([X_{n+1}=0]\right)\\ \mathbb{P}\left([X_{n+1}=1]\right)\\ \mathbb{P}\left([X_{n+1}=2]\right)\end{pmatrix}=MU_n$, et cette égalité reste vraie pour $n=0$ et $n=1$ compte-tenu du fait que $U_0=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ et $U_1=\begin{pmatrix}0\\ \frac{2}{3}\\ \frac{1}{3}\end{pmatrix}$ qui permet bien d'avoir $U_1=MU_0$ et que $U_2=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\ \frac{5}{9}\\ \frac{1}{9}\end{pmatrix}$ qui donne alors $MU_1=U_2$, le tout en raisonnant comme précédemment.

c. On trouve $MV_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $MV_2=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}\\ 0\end{pmatrix}$ et $MV_3=\begin{pmatrix}1\\ -\frac{4}{3}\\ \frac{1}{3}\end{pmatrix}$.

d. Montrons par récurrence sur n la propriété $\mathcal{P}(n)$: « $U_n=V_1+4\left(\frac{1}{2}\right)^n V_2+\left(\frac{1}{3}\right)^n V_3$ ».

- Pour $n=0$, on a $U_0=\begin{pmatrix}\mathbb{P}\left([X_0=0]\right)\\ \mathbb{P}\left([X_0=1]\right)\\ \mathbb{P}\left([X_n=2]\right)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$, et :

$$V_1+4\left(\frac{1}{2}\right)^0 V_2+\left(\frac{1}{3}\right)^0 V_3=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+4\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3\\-4\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=U_0$$

d'où la propriété $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

- Supposons que l'on a, pour un $n\in\mathbb{N}$ fixé, la propriété $\mathcal{P}(n)$, c'est à dire que $U_n=V_1+4\left(\frac{1}{2}\right)^n V_2+\left(\frac{1}{3}\right)^n V_3$, et montrons, sous cette hypothèse que l'on a $\mathcal{P}(n+1)$, c'est à dire $U_{n+1}=V_1+4\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} V_2+\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} V_3$.
D'après ce qui précède $U_{n+1}=MU_n=M\left(U_n=V_1+4\left(\frac{1}{2}\right)^n V_2+\left(\frac{1}{3}\right)^n V_3\right)=MV_1+4\left(\frac{1}{2}\right)^n MV_2+\left(\frac{1}{3}^n\right)MV_3$. Or $MV_2=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}=\frac{1}{2}V_2$ et $MV_3=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}3\\-4\\1\end{pmatrix}=\frac{1}{3}V_3$, et par suite on en déduit que $U_{n+1}=V_1+\left(\frac{1}{2}\right)^n\times\frac{1}{2}V_2+\left(\frac{1}{3}\right)^n\times\frac{1}{3}V_3=V_1+4\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}V_2+\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}V_3$, d'où la propriété $\mathcal{P}(n+1)$.
- La propriété $\mathcal{P}(0)$ étant vraie, et la propriété $\mathcal{P}(n)$ étant héréditaire, elle est donc vrai pour tout entier n.

Par suite, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $U_n=V_1+4\left(\frac{1}{2}\right)^n V_2+\left(\frac{1}{3}\right)^n V_3$.

e. On en déduit donc que : $\begin{cases}\mathbb{P}\left([X_n=0]\right)=1-\dfrac{1}{2^{n-2}}+\dfrac{1}{3^{n-1}}\\ \mathbb{P}\left([X_n=1]\right)=\dfrac{1}{2^{n-2}}-\dfrac{4}{3^n}\\ \mathbb{P}\left([X_n=2]\right)=\dfrac{1}{3^n}\end{cases}$ qui donne la loi de X.

2. On a $E(X_n)=0\times\mathbb{P}\left([X_n=0]\right)+1\times\mathbb{P}\left([X_n=1]\right)+2\times\mathbb{P}\left([X_n=2]\right)=\frac{1}{2^{n-2}}-\frac{4}{3^n}+2\times\frac{2}{3^n}=\frac{1}{2^{n-2}}-2\frac{2}{3^n}$ qui tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$ puisque $\left|\frac{1}{2}\right|<1$ et $\left|\frac{1}{3}\right|<1$.

3. La variable aléatoire T_1 est égale au nombre de tirages nécessaires pour obtenir la première boule blanche. La première boule blanche n'apparaîtra qu'après une succession ininterrompue de tirage de la boule rouge. Ainsi, $T_1(\Omega) = \mathbb{N}^*$ est T_1 suit la loi géométrique de paramètre $\dfrac{2}{3}$.
4. $[T_2 = 2]$ est l'événement la dernière boule blanche a été tirée lors du 2e tirage. Ainsi, $[T_2 = 2] = B_1 \cap B_2$.
$[T_2 = 3]$ est l'événement la dernière boule blanche a été extraite de lors à l'issue du 3etirage. Ainsi $[T_2 = 3] = \left(\overline{B_1} \cap B_2 \cap B_3\right) \cup \left(B_1 \cap \overline{B_2} \cap B_3\right)$. Par suite, $\mathbb{P}\left([T_2 = 2]\right) = \dfrac{2}{3} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{3}$, et $\mathbb{P}\left([T_2 = 3]\right) = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{2} + \dfrac{2}{3} \times \dfrac{1}{3} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{5}{18}$, en utilisant la formule des probabilités composées.
5. **a.** Soit $n \geq 2$. On a $[T_2 = n] = [X_{n-1} = 1] \cap [X_n = 0]$ puisque pour extraire la dernière boule blanche au ne tirage, l'urne ne doit contenir qu'une seule boule blanche à l'issue du $(n-1)$e tirage, et bien évidemment aucune à l'issue du ne.

   b. On a donc :
$$\mathbb{P}\left([T_2 = n]\right) = \mathbb{P}\left([X_{n-1} = 0] \cap [X_n = 0]\right) = \mathbb{P}\left([X_{n-1} = 1]\right) \times \mathbb{P}_{[X_{n-1}=1]}\left(X_n = 0\right) = \left(\frac{1}{2^{n-3}} - \frac{4}{3^{n-1}}\right) \times \frac{1}{2} = 2\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{n-}\right.$$

Pour s'occuper les jours de pluies

EX. 3 | Réf. 4384

Pour tout entier naturel n, on note $\mathbb{R}_n[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré au plus n. On considère l'application f, qui à un polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$, associe le polynôme $f(P) = P'' - 4XP'$.

1. **Étude de f :** soit n un entier naturel fixé uniquement dans cette question.
   a. Justifier que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
   b. Calculer $f(1)$, $f(X)$ puis $f\left(X^k\right)$ pour $k \in [\![2; n]\!]$.
   Établir alors que la matrice A_n de f dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ est triangulaire.
   c. Prouver que f est diagonalisable et que chacun de ses espaces propres et de dimension 1.
   d. Soit P un vecteur propre d ef associé à la valeur propre λ.
   Établir que $\lambda = -4\deg(P)$.
   En déduire qu'il existe un unique polynôme unitaire H_n de degré n tel que :
$$(\mathcal{E}_n) : \quad f\left(H_n\right) = -4nH_n$$
2. **Étude de la suite $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$:**
   a. Établir en dérivant la relation $(\mathcal{E}_n)$, démontrer que :
$$\forall n \geq 1, \quad f\left(H_n'\right) = -4(n-1)H_n'$$
   En déduire alors que :
$$\forall n \geq 1, \quad H_n' = nH_{n-1} \quad \text{et} \quad \forall n \geq 2, \quad H_n - XH_{n-1} + \frac{(n-1)H_{n-2}}{4} = 0$$
   b. Pourquoi peut-on affirmer que $H_0 = 1$ et $H_1 = X$?
   Calculer alors H_2 et H_3.
   c. D'après ce qui précède, la suite $u_n = H_n(1)$ satisfait à la relation de récurrence :
$$u_0 = 1, \quad u_1 = 1, \quad \text{et} \quad \forall n \geq 2, \quad u_n = u_{n-1} - \frac{(n-1)u_{n-2}}{4}$$
   Écrire un programme en `Python` calculant u_{2010}.

EX. 3 | Éléments de correction | Réf. 4384

1. **a.** Si $P \in \mathbb{R}_n[X]$, alors $f(P)$ est à coefficients réels et tel que $\deg(f(P)) \leq \max\left(\deg(P''), \deg(XP')\right) \leq \max(n-2, 1+(n-1)) = n$, donc $f(P) \in \mathbb{R}_n[X]$. Pour tout $(P, Q) \in (\mathbb{R}_n[X])^2$ et tout $co, \lambda, \mu \in \mathbb{R}^2$, on a $f(\lambda P+\mu Q) = (\lambda P + \mu Q)'' - 4X\left(\lambda P + \mu Q'\right) = \lambda(P'' - 4XP') + \mu(X'' - 4XQ') = \lambda f(P) + \mu f(Q)$ et $f \in \mathcal{L}\left(\mathbb{R}_n[X]\right)$.

   b. Un calcul direct donne $f(1) = 0$, $f(X) = -4X$ et $f(X^k) = k(k-1)X^{k-2} - 4kX^k$. Par conséquent, la matrice A_n de f dans la base $(1, X, \ldots, X^n)$ s'écrit :

$$A_n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & & & & & & \\ 0 & -4 & 0 & \ddots & & & & & \\ 0 & 0 & -8 & \ddots & \ddots & & & (0) & \\ & & & \ddots & & k(k-1) & & & \\ & & & & \ddots & 0 & \ddots & & \\ & & & & & -4k & \ddots & \ddots & \\ & & & & & & \ddots & \ddots & n(n-1) \\ & & (0) & & & & & \ddots & 0 \\ & & & & & & & & -4n \end{pmatrix}$$

   et elle est bien triangulaire supérieure.

   c. Puisque la matrice A_n est triangulaire supérieure, ses valeurs propres se lisent sur la diagonale et elles forment l'ensemble $\{-4k,\ k \in [\![0; n]\!]\}$. La matrice A_n admet ainsi $n+1$ valeurs propres réelles distinctes et elle est de taille $n+1$, donc elle est diagonalisable, ainsi que f par voie de conséquence, et chaque sous-espace propre est de dimension 1.

   d. Puisque P est un vecteur propre de f, il est nonnul, donc il possède un degré $N \geq 0$. Alors on peut écrire $P(X) = a_N X^N + Q_N$ avec $a_N \neq 0$ et $\deg(Q_N) > N$, ce qui donne : $f(P) = \lambda P \quad \Leftrightarrow \quad -4Na_N X^N + R_N - \lambda a_N X^N + Q_N$ avec $\deg(R_N) < N$. Par unicité des coefficients d'un polynôme, on en déduit l'égalite $-4Na_N = \lambda A_N$ d'où puisque $a_N \neq 0$, on en déduit $\lambda = -4N = -4\deg(P)$.

   Puisque $-4n$ est une valeur propre de f, il existe un polynôme non nul P tel que $f(P) = -4nP$. D'après l'égalité précédente, on en déduit que $4n = \deg(P_n) \quad \Leftrightarrow \quad \deg(P) = n$. Si l'on note a_n le coefficient dominant de P, alors $H_n = \dfrac{1}{a_n}P_n$ est un polynôme unitaire vérifiant $f(H_n) = f\left(\dfrac{1}{a_n}P_n\right) = \dfrac{1}{a_n}f(P) = \dfrac{1}{a_n} \times -4nP = -4nH_n$, ce qui justifie l'existence de H_n.

   En outre, si V_n est un autre polynôme non nul et unitaire vérifiant $f(V_n) = -4nV_n$, alors V_n est de degré n, et il est colinéaire à H_n. Ainsi, il existe un réel C tel que $V_n = CH_n$. Les polynômes V_n et H_n étant de degré n, et unitaires, on a obligatoirement $C = 1$, ce qui justifie l'unicité de H_n.

2. **a.** En dérivant la relation $\mathcal{E}_n$, on a $H_n'' - 4XH_n' = -4nH_n \Leftarrow H_n''' - 4H_n' = -4nH_n'$ ce qui donne $H_n''' - 4XH_n'' = -4(n-1)H_n'$ et donc $f(H_n') = -4(n-1)H_n'$.

   Par conséquent, H_n' appartient à l'espace propre de f associé à la valeur propre $-4(n-1)$ qui est de dimension 1, et engendré par H_{n-1} donc il existe un réel C tel que $H_n' = CH_{n-1}$. Le polynôme H_n étant unitaire, le coefficient dominant de CH_{n-1} vaut C et celui de H_n' vaut n, donc $C = n$ c'est à dire : $\forall n \geq 1, H_n' = nH_{n-1} \Leftarrow H_n'' = nH_{n-1}' = n(n-1)H_{n_1}$. En utilisant la relation $\mathcal{E}_n$, on en déduit que : $\forall n \geq 2, H_n' - 4XH_n' = -4nH_n \quad \Leftrightarrow \quad n(n-1)H_{n-2} - 4nXH_{n_1} = -4nH_n$.

   En divisant par n qui est non nul, on a $(n-1)H_{n-2} - 4XH_{n-1} = -4H_n \quad \Leftrightarrow \quad H_n = XH_{n-1} - \dfrac{n-1}{4}H_{n-2}$.

   b. Puisque $f(1) = 0$, donc 1 est un polynôme unitaire appartenant à l'espace propre de f associé à la valeur propre 0, donc par unicité de H_0, on a $H_0 = 1$.

   Puisque $f(X) = -4X$, X est un polynôme unitaire appartenant à l'espace propre de f associé à la valeur propre -4, donc par unicité de H_1, on a $H_1 = X$.

   D'après la question précédente, on a : $H_2 = X^2 - \dfrac{1}{4}$ et $H_3 = X^3 - \dfrac{3}{4}X$.

   c. La procédure suivante permet d'avoir u_{2010} :

```
def suite1(n):
    if n=0:
        suite1=1
    elif n=1:
```

```
        suite1=1
    else:
        suite1=suite1(n-1)-suite1(n-2)*(n-1)/4
```