À noter & À garder en tête

Les éléments développés ci-après ne sont souvent que des indications pour aboutir à la solution, qui détaillent la plupart du temps un cheminement à suivre pour montrer le rèsultat demandé. La plupart des calculs sont laissés aux lecteurs. . .La mise en forme de certains calculs est faite de sorte à économiser de l'espace et donc du papier, mais il conviendrait de ne pas les écrire en ligne notamment comme cela l'est parfois.

Un peu de technique

Exercice| [5096] | 1| Puissance d'une matrice

On se propose de déterminer une expression de la matrice A^n où $n \in \mathbb{N}$ pour $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

(1). Déterminer deux matrices B et C de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ telles que : $\begin{cases} B + C = A \\ -B + \frac{1}{3}C = \mathrm{I}_2 \end{cases}$

(2). Calculer BC et CB.

(3). Sans justification, exprimer B^n et C^n en fonction de B, C et $n \in \mathbb{N}^*$ uniquement.

(4). Déterminer alors une expression de A^n en fonction de n, B et C.

Éléments de correction

(1). Les matrices B et C cherchées sont solutions d'un système linéaire que l'on résout par la méthode de Gauss :

$$\begin{cases} B + C = A \\ -B + \frac{1}{3}C = \mathrm{I}_2 \end{cases} \underset{L_2 \leftarrow L_2 + L_1}{\Leftrightarrow} \begin{cases} B + C = A \\ \frac{4}{3}C = \mathrm{I}_2 + A \end{cases} \underset{L_2 \leftarrow \frac{3}{4}L_2}{\Leftrightarrow} \begin{cases} B + C = A \\ C = \frac{3}{4}\mathrm{I}_2 + \frac{3}{4}A \end{cases}$$
$$\underset{L_1 \leftarrow L_1 - L_2}{\Leftrightarrow} \begin{cases} B = -\frac{3}{4}\mathrm{I}_2 + \frac{1}{4}A \\ C = \frac{3}{4}\mathrm{I}_2 + \frac{3}{4}A \end{cases}$$

Un calcul direct donne alors que $B = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$.

(2). Un calcul direct donne que $BC = (0)$ et $CB = (0)$.

(3). On procède au calcul des premières puissances de B et C :

	$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

	$\begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \frac{9}{2} & \frac{9}{2} \\ \frac{9}{2} & \frac{9}{2} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \frac{27}{2} & \frac{27}{2} \\ \frac{27}{2} & \frac{27}{2} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \frac{81}{2} & \frac{81}{2} \\ \frac{81}{2} & \frac{81}{2} \end{pmatrix}$

Ces calculs permettent de conjecturer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\quad B^n = (-1)^{n-1}B$ et $C^n = 3^{n-1}C$

(4). Puisque $A=B+C$ et que $BC=CB$, d'après la formule du binôme de Newton, on a :

$$\begin{aligned} A^n &= (B+C)^n \\ &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}B^kC^{n-k} \\ &= \binom{n}{0}B^0C^{n-0}+\underbrace{\sum_{k=1}^{n-1}\binom{n}{k}B^kC^{n-k}}_{=(0)\text{ car } BC=CB=(0)}+\binom{n}{n}B^nC^{n-0} \\ &= C^n+B^n \\ &= 3^{n-1}C+(-1)^{n-1}B \end{aligned}$$

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

Exercice| [5097] | 2| De $\mathbb{R}^3$ à des fonctions polynôme de degré 2

Dans tout cet exercice, on désigne par F le sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$ défini par :

$$F=\left\{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3,\ a+b+c=0 \text{ et } 2a+b=0\right\}$$

(1). Montrer que F est bien un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

(2). Démontrer que F est une droite vectorielle dont on déterminera un vecteur e générateur.

(3). Pour tout $u=(a,b,c)$ élément quelconque de F, on considère la fonction polynôme f_u de degré 2 définie par :

$$f_u : x\longmapsto ax^2+bx+c$$

Dans ce qui suit, u désignera un vecteur quelconque de F.

(a). Démontrer que $f_u(1)=0$ et $f'_u(1)=0$.

(b). Justifier qu'il existe un réel α tels que : $\forall x\in\mathbb{R},\ f_u(x)=\alpha f_e(x)$.

Éléments de correction

(1). $F\subset\mathbb{R}^3$ **:** par construction de F

$\overrightarrow{0}=(0,0,0)\in F$ puisque $0+0+0=0$ et $2\times 0+0=0$.

Stabilité de F par combinaison linéaire : soient $\begin{cases} \lambda \in \mathbb{R} \\ u_1=(a,b,c)\in F \\ u_2=(a',b',c')\in F \end{cases}$ et on pose $u_3=\lambda u_1+u_2$.

Montrons que $u_3\in F$, c'est à dire qu'en posant $u_3=(a'',b'',c'')$ on doit avoir : $a''+b''+c''=0$ et $2a''+b''=0$.

Par construction de w, on a les relations : $\begin{cases} a'' = \lambda a+a' \\ b'' = \lambda b+b' \\ c'' = \lambda c+c' \end{cases}$

Par suite, il vient que :

$$\begin{aligned} a''+b''+c'' &= \lambda a+a'+\lambda b+b'+\lambda c+c' \\ &= \lambda a+\lambda b+\lambda c+\underbrace{a'+b'+c'}_{=0\text{ car } u_2\in F} \\ &= \lambda\underbrace{(a+b+c)}_{=0\text{ car } u_1\in F}+0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

et sur le même principe :

$$\begin{aligned} 2a''+b'' &= 2(\lambda a+a')+\lambda b+b' \\ &= 2\lambda a+2a'+\lambda b+b' \\ &= 2\lambda a+\lambda b+\underbrace{2a'+b'}_{=0\text{ car } u_2\in F} \\ &= \lambda\underbrace{(2a+b)}_{=0\text{ car } u_1\in F}+0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

et par suite $u_3 \in F$, ce qui assure que F est stable par combinaison linéaire.

Conclusion : F est bien un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

(2). On a clairement que :
$$\begin{aligned}(u=(a,b,c)\in F) &\Leftrightarrow \begin{cases} a+b+c=0 \\ 2a+b \quad\;\; =0\end{cases}\\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a+b+\;\; c=0 \\ \quad -b-2c=0\end{cases}\\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a+b+\;\; c=0 \\ \qquad b+2c=0\end{cases}\\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a \qquad - \;\; c=0 \\ \qquad b+2c=0\end{cases}\\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a \qquad\quad = c \\ \quad b \qquad = -2c \\ \qquad\quad c = c\end{cases}\\ &\Leftrightarrow (u\in \text{Vect}\left((1,-2,1)\right))\end{aligned}$$
et par suite, on en déduit que $F=\text{Vect}\left((1,-2,1)\right)$ et donc que F est bien une droite vectorielle engendrée par le vecteur $e=(1,-2,1)$.

(3).(a). Par définition de f_u, on a que $f_u(1)=a+b+c$ et on a clairement que : $\forall x\in\mathbb{R},\ f_u'(x)=2ax^2+b$.
Par suite on a $f_u'(1)=2a+b$.
Or puisque $u\in F$, on a $a+b+c=0$ et $2a+b=0$ ce qui assure que $f_u(1)=0$ et $f_u'(1)=0$.

(b). Puisque F est une droite vectorielle engendrée par e, il existe un réel α tel que $u=\alpha e$.
Par conséquent, on a $u=\alpha(1,-2,1)$ ce qui donne que $u=(\alpha,-2\alpha,\alpha)$.
On en déduit donc que : $\forall x\in\mathbb{R},$
$$\begin{aligned} f_u(x) &= \alpha x^2-2\alpha x+\alpha \\ &= \alpha\left(x^2-2\alpha x+1\right) \\ &= \alpha f_e(x)\end{aligned}$$
ce qui est le résultat attendu.