Consignes générales | Important

On attachera une **grande importance à la rédaction des réponses**, résoudre un exercice de mathématiques ne consiste nullement à produire un enchaînement ou enchevêtrement d'écritures algébriques sans explications ou commentaires. La longueur d'une réponse n'a rien à voir avec la longueur de la question... **On fera donc apparaître tous les résultats et raisonnements intermédiaires qui ont permis d'aboutir à la solution**.

Dans le cas où un(e) étudiant(e) repère ce qui lui semble être une **erreur d'énoncé**, il (elle) le signale très rapidement au **professeur**.

Un peu de technique

EX. 1 | Réf. 1571

On définit l'application $\langle \bullet \,|\bullet \rangle$ sur $\mathbb{R}_2[X]\times\mathbb{R}_2[X]$ par : $\langle \bullet \,|\bullet \rangle : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X]\times\mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (P,Q) & \longmapsto & P(0)\times Q(0)+P'(0)\times Q'(0)+P''(0)\times Q'' \end{array}\right.$

et on admet que $\langle \bullet \,|\bullet \rangle$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}_2[X]$.

1. Calculer, pour tout couple $(i,j)\in [\![0;2]\!]^2$, le réel $a_{i,j}=\langle X^i \,|X^j \rangle$.
2. En déduire une base orthonormale de $\mathbb{R}_2[X]$ pour $\langle \bullet \,|\bullet \rangle$.
3. Soit F et G les sous-espaces de $\mathbb{R}_2[X]$ définis par : $F=\mathrm{Vect}\left(1+X,X^2\right)$ et $G=\mathrm{Vect}\,(1-X)$.
   Montrer que F et G sont orthogonaux pour $\langle \bullet \,|\bullet \rangle$.

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

EX. 2 | Réf. 4425

1. Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 t^n \ln(t)\,\mathrm{d}t$ est une intégrale convergente.
2. Montrer que l'on définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$ en posant :
$$\forall\,(P,Q)\in\mathbb{R}[X]\times\mathbb{R}[X],\ \langle P\,|Q\rangle=-\int_0^1 P(t)Q(t)t\ln(t)\,\mathrm{d}t$$
3. Calculer $\langle X^r \,|1\rangle$ pour tout $r\in\mathbb{N}$, et en déduire alors $\langle X^p \,|X^q\rangle$ pour tout $(p,q)\in\mathbb{N}$.
4. Déterminer alors la projection orthogonale du polynôme X^2+X+1 sur $\mathbb{R}_1[X]$.