Consignes générales | Important

On attachera une **grande importance à la rédaction des réponses**, résoudre un exercice de mathématiques ne consiste nullement à produire un enchaînement ou enchevêtrement d'écritures algébriques sans explications ou commentaires. La longueur d'une réponse n'a rien à voir avec la longueur de la question. . . **On fera donc apparaître tous les résultats et raisonnements intermédiaires qui ont permis d'aboutir à la solution**.

Dans le cas où un(e) étudiant(e) repère ce qui lui semble être une **erreur d'énoncé**, il (elle) le signale très rapidement au **professeur**.

Travailler les fondamentaux

EX. 1 | Réf. 4385

$(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ désigne un espace probabilisé.
Soit X une variable aléatoire réelle discrète définie sur Ω telle que $X(\Omega) = \mathbb{N}$.
On suppose que la loi de X est donnée par la relation : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad 3\mathbb{P}([X = n+2]) = 4\mathbb{P}([X = n+1]) - \mathbb{P}([X = n])$

1. Démontrer qu'il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}([X = n]) = \alpha + \beta \times \left(\dfrac{1}{3}\right)^n$.

2. Déterminer (α, β) et expliciter alors la loi de X.

3. Déterminer la loi de la variable aléatoire $Y = X + 1$.

4. En déduire que X admet une espérance et une variance et en donner leurs valeurs.

EX. 2 | Réf. 4637

Soit $p \in [0; 1]$. Une puce se déplace aléatoirement sur droite graduée d'origine 0. À chaque instant, elle fait un bond d'une unité vers la droite ou d'une unité vers la gauche avec les probabilités respectives p et $1 - p$. À l'instant initial, la puce est à l'origine. Étant donné $n \in \mathbb{N}^*$, on note X_n l'abscisse de la puce à l'instant n.

1. Déterminer la loi de X_n.

2. Justifier que X_n admet une espérance et une variance.

Préparation à l'oral

EX. 3 | Réf. 4639

On suppose que X est une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ telle que :

$$X(\Omega) = \mathbb{N}^* \text{ et : } \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}([X = n]) = \frac{1}{n(n+1)}$$

Montrer que X n'admet pas d'espérance, mais que $\sqrt{X}$ oui.

Mobiliser toutes ses connaissances

EX. 4 | Réf. 4635

On dispose d'une boîte qui contient deux jetons, un noir et un blanc.
On procède à une succession de n tirages dans cette boîte en le remettant entre chaque tirage après en avoir noté la couleur.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on désigne par A_n et D_n les événements suivants :

A_n **:** « on obtient des jetons des deux couleurs au cours des n tirages »

D_n **:** « on obtient au plus un jeton noir »

1. Déterminer $\mathbb{P}(A_n)$ et $\mathbb{P}(D_n)$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$.

2. Dans le cas où $n = 2$, les deux événements A_n et D_n sont-ils indépendants ?

3. Même question dans le cas où $n = 3$.

Pour s'occuper les jours de pluies

EX. 5 | Réf. 4401

Dans tout cet exercice, n désigne un entier naturel non nul.
Un sac contient n jetons.
On tire successivement et sans remise deux jetons de ce sac.
On désigne par X la variable aléatoire égale au premier numéri tiré, et Y la variable aléatoire égale au deuxième numéro tiré.

1. Identifier la loi de X et donner $\mathbb{E}(X)$.

2. Déterminer la loi de Y et donner $\mathbb{E}(Y)$.

3. Calculer $\mathrm{Cov}(X, Y)$.

4. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

5. On définit la variable aléatoire Z par : $Z = |X - Y|$.

- **a.** Expliciter le support $Z(\Omega)$ de Z.
- **b.** Soit $k \in Z(\Omega)$. Justifier que $[Z = k] = ([Z = k] \cap [X > Y]) \cup ([Z = k] \cap [X < Y])$.
- **c.** En déduire la loi de Z.
- **d.** Justifier que Z admet une espérance puis la calculer.