Consignes générales | Important

On attachera une **grande importance à la rédaction des réponses**, résoudre un exercice de mathématiques ne consiste nullement à produire un enchaînement ou enchevêtrement d'écritures algébriques sans explications ou commentaires. La longueur d'une réponse n'a rien à voir avec la longueur de la question...**On fera donc apparaître tous les résultats et raisonnements intermédiaires qui ont permis d'aboutir à la solution**.

Dans le cas où un(e) étudiant(e) repère ce qui lui semble être une **erreur d'énoncé**, il (elle) le signale très rapidement au **professeur**.

Je m'entraîne à rédiger

EX. 1| Réf. 4379

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A = (a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq n}} \in \mathcal{O}(n)$.

Montrer que : $\left|\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\right| \leq n$

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

EX. 2| Réf. 4378

1. Montrer que : $\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \displaystyle\int_0^{\pi} \left(\frac{x^2}{2\pi} - x\right)\cos(kx)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{k^2}$

2. Soit $x \in]0;\pi]$.

a. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,x}\dfrac{1-\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,nx}}{1-\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,x}} = \dfrac{\sin\left(\dfrac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\dfrac{x}{2}\right)}\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,\frac{(n+1)}{2}x}$

b. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\cos(kx) = \frac{\sin\left(\dfrac{nx}{2}\right)\cos\left(\dfrac{(n+1)x}{2}\right)}{\sin\left(\dfrac{x}{2}\right)}$

3. Soit g la fonction définie par : $g : \left|\begin{array}{ccc} [0;\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} \dfrac{\dfrac{x^2}{2\pi}-x}{2\sin\left(\dfrac{x}{2}\right)} \text{ si } x \in]0;\pi] \\ -1 \text{ si } x = 0 \end{cases} \end{array}\right.$

Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0;\pi]$.

4. a. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6} + \int_0^{\pi} g(x)\sin\left(\frac{2n+1}{2}x\right)\,\mathrm{d}x.$

b. On admet le résultat suivant [a] : Si $\Psi \in \mathcal{C}^1([0;\pi],\mathbb{R})$, alors $\displaystyle\int_0^{\pi}\Psi(x)\sin(\alpha x)\,\mathrm{d}x \underset{\alpha\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$

Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}$ converge et que sa somme vaut $\dfrac{\pi^2}{6}$.

a. C'est ce qu'on appelle le lemme de Lebesgues

Pour s'occuper les jours de pluies

EX. 3| Réf. 2201

Les deux parties de ce problème ne sont pas indépendantes, dans la mesure où certains résultats établis dans la **partie A** sont réutilisés dans la **partie B**.

Partie A - Un préliminaire mathématique

Soient $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Soient $u_1 = \left(1, \sqrt{2}, 1\right)$, $u_2 = \left(1, -\sqrt{2}, 1\right)$ et $u_3 = (-1, 0, 1)$ trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$.
On note $\mathcal{B}'$ la famille formée par ces trois vecteurs, c'est à dire $\mathcal{B}' = (u_1, u_2, u_3)$.

a. Montrer que la famille $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

b. Écrire la matrice de passage P de la base canonique $\mathcal{B}$ à cette base $\mathcal{B}'$.

c. Déterminer l'inverse de la matrice P.

2. Montrer que $D_1 = P^{-1}AP$ et $D_2 = P^{-1}JP$ sont deux matrices diagonales que l'on explicitera.

3. On considère le sous-ensemble $\mathcal{F}$ de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ défini par :

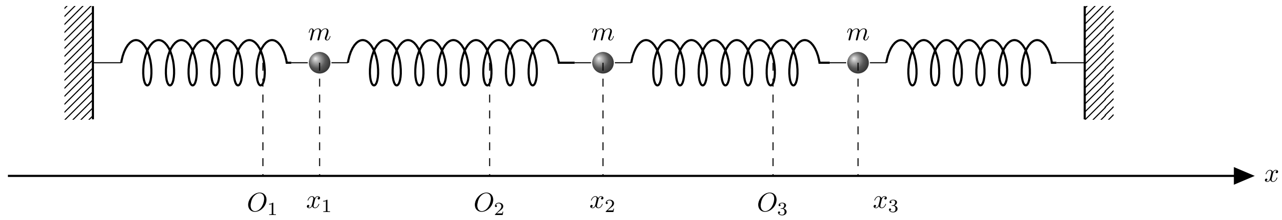
$$\mathcal{F} = \left\{ M\,(a,b,c) = \begin{pmatrix} a & c & b \\ c & a+b & c \\ b & c & a \end{pmatrix}, \, (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \right\}$$

a. Montrer que $\mathcal{F} = \mathrm{Vect}\,(I_3, J, A)$.

b. Déduire des questions précédentes que toute matrice $M\,(a,b,c)$ de $\mathcal{F}$ peut s'écrire sous la forme $M(a,b,c) = P^{-1}DP$ où D est une matrice diagonale que l'on explicitera.

Partie B - Application à l'étude d'un système d'oscillateurs

On considère un système de 3 oscillateurs couplés, où les 4 ressorts sont identiques et de constante de raideur k.
Les positions des masses m sont repérées par leurs abscisses x_1, x_2 et x_3 à partir de leur position d'origine respective O_1, O_2 et O_3, positions pour lesquelles les ressorts ne sont pas tendus.
On suppose qu'on lâche les masses aux abscisses x_{1m}, x_{2m} et x_{3m} sans vitesse initiale.



On montre alors en appliquant le principe fondamental de la dynamique et en posant $\omega_0^2 = \dfrac{k}{m}$ avec $\omega_0 \in \mathbb{R}_+^*$, que les abscisses x_1, x_2 et x_3 vérifient le système d'équations différentielles suivant :

$$(\mathcal{S}_d) : \quad \begin{cases} x_1''(t) = -2\omega_0^2 x_1(t) + \omega_0^2 x_2(t) \\ x_2''(t) = \omega_0^2 x_1(t) - 2\omega_0^2 x_2(t) + \omega_0^2 x_3(t) \\ x_3''(t) = \omega_0^2 x_2(t) - 2\omega_0^2 x_3(t) \end{cases}$$

Pour toute la suite, on désignera par $X(t)$, $X'(t)$ et $X''(t)$ les trois vecteurs colonnes :

$$X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix}, \quad X'(t) = \begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ x_3'(t) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad X''(t) = \begin{pmatrix} x_1''(t) \\ x_2''(t) \\ x_3''(t) \end{pmatrix}$$

1. En observant la forme du système $\mathcal{S}_d$, déterminer une matrice $M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $X''(t) = MX(t)$.
On dit alors que $X''(t) = MX(t)$ est la représentation matricielle du système différentiel $\mathcal{S}_d$.

2. Déterminer trois réels a, b et c pour que M s'écrive sous la forme $M(a, b, c)$ tel que définie dans la **partie A**.

3. En utilisant les résultats de la **partie A**, montrer que l'on peut écrire $PX''(t) = DPX(t)$ où P et D sont deux matrices que l'on précisera.

4. On pose $Y''(t) = PX''(t)$ et $Y(t) = PX(t)$, où l'on écrit $Y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{pmatrix}$ et $Y''(t) = \begin{pmatrix} y_1''(t) \\ y_2''(t) \\ y_3''(t) \end{pmatrix}$.

Résoudre le système différentiel $\mathcal{S}_d$ est donc équivalent à résoudre le système différentiel $\mathcal{S}_d'$ dont la représentation matricielle est $Y''(t) = DY(t)$.

a. Effectuer le produit $DY(t)$ pour trouver des équations différentielles satisfaites par y_1'', y_2'' et y_3''.

b. En déduire que y_1 est solution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants, que l'on résoudra.

c. En faire de même pour y_2 et y_3.

5. En remarquant que la relation $Y(t) = PX(t)$ permet d'écrire $X(t) = P^{-1}Y(t)$, expliciter alors $x_1(t)$, $x_2(t)$ et $x_3(t)$ en fonction de t et des conditions initiales x_{1m}, x_{2m} et x_{3m}.