Important

On attachera une **grande importance à la rédaction des réponses**, résoudre un exercice de mathématiques ne consiste nullement à produire un enchaînement ou enchevêtrement d'écritures algébriques sans explications ou commentaires. La longueur d'une réponse n'a rien à voir avec la longueur de la question... **On fera donc apparaître tous les résultats et raisonnements intermédiaires qui ont permis d'aboutir à la solution**.

Dans le cas où un(e) étudiant(e) repère ce qui lui semble être une **erreur d'énoncé**, il (elle) le signale très rapidement au **professeur**.

Un peu de technique

Exercice| [4922] | 1| Diagonalisation matrice 2×2 | ENS 2021 Filière BL

Soient a et b deux réels, et soit M la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & -a \\ 1 & -b \end{pmatrix}$.

(1). Donner une condition nécessaire et suffisante sur a et b pour que la matrice soit inversible.

(2). Donner une condition nécessaire et suffisante sur a et b pour que la matrice soit diagonalisable.

(3). Soient $\lambda < \mu$ deux réels. Déterminer a et b de sorte que les valeurs propres de M soient λ et μ, puis déterminer une base de vecteurs propres de M.

(4). Soit $A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ une matrice ayant deux valeurs propres distinctes. Montrer que A est semblable à la matrice M pour des coefficients a et b bien choisis.

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

Exercice| [4926] | 2| Diagonalisation d'un endomorphisme | ENS 2018 Filière BL

Pour un entier $n \geq 1$, on note $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices à n lignes, n colonnes et à coefficients réels.
Si $M = (m_{i,j}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, on note M^T la transposée de M qui est une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dont le coefficient placé à la ligne i et à la colonne j vaut $m_{i,j}$.
Soit Φ l'application donnée par : $\Phi : \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \\ A & \longmapsto & A - A^T \end{array} \right.$.
On définit de plus l'ensemble $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ des matrices symétriques et l'ensemble $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ des matrices antisymétriques par :

$$\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) = \left\{A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}),\ A = A^T\right\} \text{ et } \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) = \left\{A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}),\ A = -A^T\right\}$$

(1). Montrer que Φ est un endomorphisme de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

(2). Déterminer $\mathrm{Ker}(\Phi)$ et montrer que $\mathrm{Im}(\Phi) = \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

(3). Montrer que $\mathscr{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

(4). Montrer que les seules valeurs propres de Φ sont 0 et 2.

(5). Montrer que Φ est diagonalisable.