Éléments de correction

Les indications qui suivent ne sont là que pour vous aider à démarrer la résolution des situations proposées. Elles sont énoncées en s'appuyant sur les éléments développés en cours. D'autres solutions ou pistes de résolution sont bien évidemment possibles et vous êtes vivement encouragés à les mener jusqu'au bout. Si certains points du devoir restent délicats à mettre en oeuvre, n'hésitez pas à me solliciter, ou même à en discuter avec vos camarades, de tels échanges étant très souvent bénéfiques!

Il est peu pertinent et presque inutile de s'approprier sans réflexion le travail d'un autre puisque de toute façon, la sanction tombera d'elle même lors des évaluations en classe en temps limité.

Un peu de technique

EX. 1 | Réf. 3242

Une ville des États-Unis comprend 20 rues toutes orientées Sud-Nord numérotées de 1 à 20, la rue la plus à l'ouest portant le numéro 1 et la plus à l'est le numéro 20. Elle contient aussi 30 avenues toutes orientées Est-Ouest, la plus au sur portant le numéro 1 et la plus au nord le numéro 30.

Bob habite au carrefour First Street et First Avenue. Son école se trouve au carrefoir Nineth Street et Seventh Avenue. Par aller à l'école, il ne se dirige que vers l'est ou vers le nord.

1. Quel est le nombre de chemins parmi lesquels Bob peut choisir un itinéraire chaque matin ?
2. Au carrefour de Fourth Street et Fourth Avenue, il y a un marchand de glaces. Combien y a-t-il de tels chemins passant devant le marchand de glaces ?
3. John, un ami de Bob, habite sur la Third Avenue à mi-chemin entre la Sixth Street et la Seventh Street. Combien y a-t-il de chemins permettant à Bob de passer chez John et de finir la route avec lui ?

EX. 1 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 3242

1. voir qu'un chemin d'un point du quadrillage induit par les rues et avenues est une succession de déplacements vers le nord (N) ou vers l'est (E) que l'on écrit sous forme d'un mot NNNEENN…dont il faut compter finalement toutes les manières de l'écrire. Penser aussi au nombre de N et de E qui sont utilisés…
2. Il suffit de décomposer son trajet en deux sous-trajets et reprendre le raisonnement de la question précédente.
3. Il suffit de décomposer son trajet en sous-trajets et reprendre le raisonnement déjà fait.

EX. 2 | Réf. 3243

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie par les relations : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = 2u_n - n \end{cases}$.
Montrer à l'aide d'un raisonnement par récurrence sur l'entier $n \in \mathbb{N}$ que l'on a : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = 2^n + n + 1$.

EX. 2 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 3243

- Il s'agit d'un raisonnement par récurrence, donc on commence par bien expliciter l'assertion à établir, puis on s'efforce de respecter le plan de rédaction d'une récurrence.
- L'initialisation se fait donc au rang 0 en comparant la valeur de u_0 donnée par la définition de la suite, et la valeur que l'on obtiendrait à l'aide de la formule de calcul proposée.
- Pour l'hérédité, on part de la définition de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui donne u_{n+1} en fonction de u_n, puis ensuite on utilise l'hypothèse de récurrence pour poursuivre.
- Ne pas oublier de conclure proprement.

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

EX. 3 | Réf. 3245

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donnée par les relations : $\begin{cases} u_0 &= \dfrac{2}{3} \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} &= \dfrac{u_n}{2} + \dfrac{n}{2\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$

1. On considère alors la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dont le terme général v_n est défini par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = u_n\sqrt{2} - n.$$

a. Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique dont on identifiera les éléments caractéristiques.

b. En déduire une expression de v_n en fonction de n.

2. Déduire des questions précédentes, une expression de u_n en fonction de n.

3. Que vaut alors $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$?

EX. 3 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 3245

1. a. Trouver une relation du type $v_{n+1} = q \times v_n$ ou montrer que le quotient $\dfrac{v_{n+1}}{v_n}$ est constant.

b. Mettre en oeuvre les formules du cours.

2. On récupère l'expression de u_n à l'aide de cette de v_n.

3. C'est un calcul de somme qui fait intervenir deux sommes de références. . .