Éléments de correction

Les indications qui suivent ne sont là que pour vous aider à démarrer la résolution des situations proposées. Elles sont énoncées en s'appuyant sur les éléments développés en cours. D'autres solutions ou pistes de résolution sont bien évidemment possibles et vous êtes vivement encouragés à les mener jusqu'au bout. Si certains points du devoir restent délicats à mettre en oeuvre, n'hésitez pas à me solliciter, ou même à en discuter avec vos camarades, de tels échanges étant très souvent bénéfiques!

Il est peu pertinent et presque inutile de s'approprier sans réflexion le travail d'un autre puisque de toute façon, la sanction tombera d'elle même lors des évaluations en classe en temps limité.

Un peu de technique

EX. 1 | Réf. 2322

Soit $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $\begin{cases} F_0 = 1 \\ F_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \end{cases}$.

Montrer que pour tout $n \geq 1$, $F_n < \left(\dfrac{7}{4}\right)^n$.

EX. 1 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 2322

- On effectue un raisonnement par récurrence...
- ...de type peut-être récurrence « double » ou « forte ».
- Pour l'hérédité, on pensera que l'on est en train de travailler sur des inégalités...

EX. 2 | Réf. 2320

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{4}{k(k+1)(k+2)}$.

1. Déterminer trois réels a, b et c tels que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \dfrac{4}{n(n+1)(n+2)} = \dfrac{a}{n} + \dfrac{b}{n+1} + \dfrac{c}{n+2}$.
2. Simplifier alors l'expression de u_n.
3. En déduire la limite de $(u_n)_{n\geq 1}$.

EX. 2 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 2320

1. On réduit au même dénominateur et on procède à une identification des numérateurs ce qui donnera un petit système à résoure....
2. Il y a un télścopage de termes à faire.
3. On prend alors la limite de l'expression obtenue terme à terme.

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

EX. 3 | Réf. 2321

Dans $\mathbb{R}^4$, on considère les quatres vecteurs u_1, u_2, u_3 et u_4 identifiés aux vecteurs colonnes :

$$U_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ m \end{pmatrix}, \quad U_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ m \\ 1 \end{pmatrix}, \quad U_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ m \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad U_4 = \begin{pmatrix} m \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{où } m \text{ est un paramètre réel.}$$

Pour quelle(s) valeurs de m :

1. $\mathcal{F} = (u_1, \ldots, u_4)$ est-elle génératrice de $\mathbb{R}^4$?
2. $\mathcal{F} = (u_1, \ldots, u_4)$ est-elle une famille libre de $\mathbb{R}^4$?

EX. 3 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf . 2321

- On procèdera à un échelonnement de la matrice associée à $\mathcal{F}$.
- On fera attention aux opérations effectuées, qui risquent d'être conditionnées par des valeurs interdites pour m ;
- On discutera ensuite du nombre de pivots obtenus en fonction de m.