Éléments de correction

Les indications qui suivent ne sont là que pour vous aider à démarrer la résolution des situations proposées. Elles sont énoncées en s'appuyant sur les éléments développés en cours. D'autres solutions ou pistes de résolution sont bien évidemment possibles et vous êtes vivement encouragés à les mener jusqu'au bout. Si certains points du devoir restent délicats à mettre en oeuvre, n'hésitez pas à me solliciter, ou même à en discuter avec vos camarades, de tels échanges étant très souvent bénéfiques!

Il est peu pertinent et presque inutile de s'approprier sans réflexion le travail d'un autre puisque de toute façon, la sanction tombera d'elle même lors des évaluations en classe en temps limité.

Travailler les fondamentaux

EX. 1 | Réf. 4385

$(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ désigne un espace probabilisé.
Soit X une variable aléatoire réelle discrète définie sur Ω telle que $X(\Omega) = \mathbb{N}$.
On suppose que la loi de X est donnée par la relation : $\forall n \in \mathbb{N},\quad 3\mathbb{P}([X = n+2]) = 4\mathbb{P}([X = n+1]) - \mathbb{P}([X = n])$

1. Démontrer qu'il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N},\quad \mathbb{P}([X = n]) = \alpha + \beta \times \left(\frac{1}{3}\right)^n$.
2. Déterminer (α, β) et expliciter alors la loi de X.
3. Déterminer la loi de la variable aléatoire $Y = X + 1$.
4. En déduire que X admet une espérance et une variance et en donner leurs valeurs.

EX. 1 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 4385

1. En notant $p_n = \mathbb{P}([X = n])$, on reconnaîtra une suite récurrence linéaire d'ordre 2.
2. On exploitera le fait que $\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}([X = n]) = 1$ en passant par la suite des sommes partielles de la série.
3. Expliciter $\mathbb{P}([Y = k])$ à l'aide de $\mathbb{P}([X = k-1])$ et reconnaître la loi de Y directement.
4. La linéarité de l'espérance donne la valeur de $\mathbb{E}(X)$ et on détermine sa variance sur le même principe.

EX. 2 | Réf. 4637

Soit $p \in [0;1]$. Une puce se déplace aléatoirement sur droite graduée d'origine 0. À chaque instant, elle fait un bond d'une unité vers la droite ou d'une unité vers la gauche avec les probabilités respectives p et $1-p$. À l'instant initial, la puce est à l'origine. Étant donné $n \in \mathbb{N}^*$, on note X_n l'abscisse de la puce à l'instant n.

1. Déterminer la loi de X_n.
2. Justifier que X_n admet une espérance et une variance.

EX. 2 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 4637

Préparation à l'oral

EX. 3 | Réf. 4639

On suppose que X est une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ telle que :

$$X(\Omega) = \mathbb{N}^* \text{ et : } \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}([X = n]) = \frac{1}{n(n+1)}$$

Montrer que X n'admet pas d'espérance, mais que $\sqrt{X}$ oui.

EX. 3 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 4639

Mobiliser toutes ses connaissances

EX. 4 | Réf. 4635

On dispose d'une boîte qui contient deux jetons, un noir et un blanc.
On procède à une succession de n tirages dans cette boîte en le remettant entre chaque tirage après en avoir noté la couleur.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on désigne par A_n et D_n les événements suivants :

A_n **:** « on obtient des jetons des deux couleurs au cours des n tirages »

D_n **:** « on obtient au plus un jeton noir »

1. Déterminer $\mathbb{P}(A_n)$ et $\mathbb{P}(D_n)$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$.

2. Dans le cas où $n = 2$, les deux événements A_n et D_n sont-ils indépendants ?

3. Même question dans le cas où $n = 3$.

EX. 4 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 4635

1. On s'intéressera plutôt à $\mathbb{P}\left(\overline{A_n}\right)$, car l'événement $\overline{A_n}$ est bien plus simple à décrire. Pour D_n, on traduira sous forme d'une union disjointe la notion de « au plus un jeton noir ».

2. On vérifiera si $\mathbb{P}(A_2 \cap D_2) = \mathbb{P}(A_2) \times \mathbb{P}(D_2)$.

3. On vérifiera si $\mathbb{P}(A_3 \cap D_3) = \mathbb{P}(A_3) \times \mathbb{P}(D_3)$.

Pour s'occuper les jours de pluies

EX. 5 | Réf. 4401

Dans tout cet exercice, n désigne un entier naturel non nul.
Un sac contient n jetons.
On tire successivement et sans remise deux jetons de ce sac.
On désigne par X la variable aléatoire égale au premier numéri tiré, et Y la variable aléatoire égale au deuxième numéro tiré.

1. Identifier la loi de X et donner $\mathbb{E}(X)$.

2. Déterminer la loi de Y et donner $\mathbb{E}(Y)$.

3. Calculer $\mathrm{Cov}(X, Y)$.

4. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

5. On définit la variable aléatoire Z par : $Z = |X - Y|$.

- **a.** Expliciter le support $Z(\Omega)$ de Z.
- **b.** Soit $k \in Z(\Omega)$. Justifier que $[Z = k] = ([Z = k] \cap [X > Y]) \cup ([Z = k] \cap [X < Y])$.
- **c.** En déduire la loi de Z.
- **d.** Justifier que Z admet une espérance puis la calculer.

EX. 5 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 4401

1. On reconnaîtra une loi usuelle.

2. On utilisera le système complet d'événements $([X = i])$ pour déterminer $\mathbb{P}([Y = j])$ pour reconnaître ensuite une loi usuelle.

3. On commencera par calculer $\mathbb{E}(XY)$ pour en déduire $\mathrm{Cov}(X, Y)$.

4. Peut-on conclure à l'aide de $\mathrm{Cov}(X, Y)$ ici ?

5.
- **a.** On remarquera que l'événement $[X = Y]$ est impossible.
- **b.** C'est une conséquence de la remarque précédente.
- **c.** On utilisera la décomposition précédente pour calculer $\mathbb{P}([Z = k])$.
- **d.** Après avoir justifié l'existence de l'espérance de Z, on explicitera la formule donnant l'espérance d'une variable aléatoire finie.