Éléments de réflexion | Pistes de recherche

Les éléments développés ci-après ne sont souvent que des indications pour aboutir à la solution, qui détaillent la plupart du temps un cheminement à suivre pour montrer le rèsultat demandé. La plupart des calculs sont laissés aux lecteurs. . .La mise en forme de certains calculs est faite de sorte à économiser de l'espace et donc du papier, mais il conviendrait de ne pas les écrire en ligne notamment comme cela l'est parfois.

Un peu de technique

EX. 1 | Réf. 2327

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie par les relations $\begin{cases} u_0 = 3 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \dfrac{2}{3}u_n + \dfrac{5}{3} \end{cases}$.

1. Déterminer les valeurs des 5 premiers termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
On donnera les résultats sous forme fractionnaire.

2. Montrer par récurrence sur l'entier n que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad u_n \leq 5$.

3. Étudier les variations de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

4. En déduire la nature de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

5. On définit la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : $\quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = u_n - 5$.

- **a.** Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique dont on identifiera la raison et le premier terme.
- **b.** Exprimer alors v_n en fonction de n, puis u_n en fonction de n.
- **c.** En déduire alors la valeur de la limite éventuelle de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

EX. 1 | Éléments de correction | Réf. 2327

1. On trouve $u_0 = 3$, $u_1 = \dfrac{11}{3}$, $u_2 = \dfrac{37}{9}$, $u_3 = \dfrac{119}{27}$ et $u_4 = \dfrac{371}{81}$.

2. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $\mathcal{P}(n)$: ´ $u_n \leq 5$ ˇ. On va montrer par récurrence sur l'entier n que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout n.

Initialisation : on a $u_0 = 3$ et $3 \leq 5$, donc $u_0 \leq 5$ et $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que l'on a $\mathcal{P}(n)$, à savoir $u_n \leq 5$ et montrons, sous cette hypothèse que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie, c'est à dire $u_{n+1} \leq 5$.

Par hypothèse de récurrence on a $u_n \leq 5$, donc $\dfrac{2}{3}u_n \leq \dfrac{10}{3}$ et par suite $\dfrac{2}{3}u_n + \dfrac{5}{3} \leq \dfrac{10}{3} + \dfrac{5}{3} = \dfrac{15}{3} = 5$, c'est à dire $u_{n+1} \leq 5$ et donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Conclusion : la proposition $\mathcal{P}(n)$ est vraie au rang 0 et héréditaire, donc elle est vraie pour tout entier n.

3. On étudie le signe de $u_{n+1} - u_n$ pour tout entier n : $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{2}{3}u_n + \frac{5}{3} - u_n \\ &= -\frac{1}{3}u_n + \frac{5}{3} \\ &= -\frac{1}{3}(u_n - 5) \end{aligned}$$

Or, d'après la question précédente, $u_n \leq 5$, et par suite $-\dfrac{1}{3}(u_n - 5) \geq 0$. Finalement, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n \geq 0$ et la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est ainsi croissante.

4. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant croissante majorée, par le théorème de la limite monotone, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite convergente.

5. **a.** $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - 5 \\ &= \frac{2}{3}u_n + \frac{5}{3} - 5 \\ &= \frac{2}{3}u_n - \frac{10}{3} \\ &= \frac{2}{3}(u_n - 5) \\ &= \frac{2}{3}v_n \end{aligned}$$

et par suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $\dfrac{2}{3}$ et de premier terme $v_0 = u_0 - 5 = -2$.

b. On en déduit ainsi que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $v_n = -2\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$ et $u_n = -2\left(\dfrac{2}{3}\right)^n + 5$.

c. Puisque $-1 < \dfrac{2}{3} < 1$, il vient $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{2}{3}\right)^n = 0$, et par conséquent que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 5$.

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

EX. 2 | Réf. 2324

On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\binom{n}{k}}$.

1. Montrer que pour tout $n \geq 4$, on a : $u_n = 2 + \dfrac{2}{n} + \displaystyle\sum_{k=2}^{n-2} \frac{1}{\binom{n}{k}}$

2. Soit $n \geq 4$. Montrer que pour tout $k \in [\![2; n-2]\!]$, $\dbinom{n}{k} \geq \dfrac{n(n-1)}{2}$.

3. En déduire un encadrement de u_n et montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 2.

EX. 2 | Éléments de correction | Réf. 2324

1. Pour $n \geq 4$. On a :

$$\begin{aligned} u_n &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\binom{n}{k}} \\ &= \frac{1}{\binom{n}{0}} + \frac{1}{\binom{n}{1}} + \sum_{k=2}^{n-2} \frac{1}{\binom{n}{k}} + \frac{1}{\binom{n}{n-1}} + \frac{1}{\binom{n}{n}} \\ &= \frac{1}{1} + \frac{1}{n} + \sum_{k=2}^{n-2} \frac{1}{\binom{n}{k}} + \frac{1}{n} + \frac{1}{1} \\ &= 2 + \frac{2}{n} + \sum_{k=2}^{n-2} \frac{1}{\binom{n}{k}} \end{aligned}$$

2. Soit $n \geq 4$ et $n \in [\![2; n-2]\!]$. Par définition $\dbinom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!} = \dfrac{n \times (n-1) \times \ldots \times (n-k+1)}{k!}$

Ainsi, $\dbinom{n}{k} = \dfrac{n(n-1)}{2} \times \dfrac{n-2}{k} \times \underbrace{s\frac{n-3}{k-1}}_{\geq 1} \times \ldots \times \underbrace{\frac{n-k+1}{3}}_{\geq 1} \geq \dfrac{n(n-1)}{2}$

3. Il vient alors que pour tout $n \geq 4$ et $k \in [\![2; n-2]\!]$, $\dfrac{1}{\binom{n}{k}} \leq \dfrac{2}{n(n-1)}$.

Ainsi, $u_n = \underbrace{2 + \dfrac{2}{n} + \displaystyle\sum_{k=2}^{n-2} \frac{1}{\binom{n}{k}}}_{\geq 0} \leq 2 + \dfrac{2}{n} + \displaystyle\sum_{k=2}^{n-2} \frac{2}{n(n-1)}$ ce qui donne $2 \leq u_n \leq 2 + \dfrac{2}{n} + \dfrac{2}{n(n-1)} \times (n-2-2+1)$

soit $2 \leq u_n \leq 2 + \dfrac{2}{n} + (n-3)\dfrac{2}{n(n-1)}$.

Par ailleurs, puisque $\dfrac{2}{n} + (n-3)\dfrac{2}{n(n-1)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, il vient par le théorème d'encadrement que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 2$.