Éléments de réflexion | Pistes de recherche

Les éléments développés ci-après ne sont souvent que des indications pour aboutir à la solution, qui détaillent la plupart du temps un cheminement à suivre pour montrer le rèsultat demandé. La plupart des calculs sont laissés aux lecteurs. . .La mise en forme de certains calculs est faite de sorte à économiser de l'espace et donc du papier, mais il conviendrait de ne pas les écrire en ligne notamment comme cela l'est parfois.

Un peu de technique

EX. 1 | Réf. 2322

Soit $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $\begin{cases} F_0 = 1 \\ F_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \end{cases}$.

Montrer que pour tout $n \geq 1$, $F_n < \left(\frac{7}{4}\right)^n$.

EX. 1 | Éléments de correction | Réf. 2322

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathcal{P}(n)$ l'assertion : $\mathcal{P}(n)$; ´ $F_n < \left(\frac{7}{4}\right)^n$ ˇ.

On va montrer par récurrence double sur n que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \geq 1$.

Initialisation :
- $F_1 = 1$ et $\left(\frac{7}{4}\right)^1 = \frac{7}{4}$ et $1 < \frac{7}{4}$, donc $F_1 < \left(\frac{7}{4}\right)^1$, c'est à dire $\mathcal{P}(1)$ est vraie.
- $F_2 = F_1 + F_0$ par définition, soit $F_2 = 2$. Or $\left(\frac{7}{4}\right)^2 = \frac{49}{16} = 2 + \frac{17}{16}$ et ainsi $2 < \left(\frac{7}{4}\right)^2$, c'est à dire $F_2 < \left(\frac{7}{4}\right)^2$, c'est dire que $\mathcal{P}(2)$ est vraie.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}^*$, supposons que l'on a $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n+1)$, à savoir que $F_n < \left(\frac{7}{4}\right)^n$ et $F_{n+1} < \left(\frac{7}{4}\right)^{n+1}$.

Montrons que, sous cette hypothèse, $\mathcal{P}(n+2)$ est vraie, c'est à dire que $F_{n+2} < \left(\frac{7}{4}\right)^{n+2}$.

Par définition $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$. Par hypothèse de récurrence, il vient que $F_{n+2} < \left(\frac{7}{4}\right)^{n+1} + \left(\frac{7}{4}\right)^n$, ou encore en factorisant par $\left(\frac{7}{4}\right)^n$ que $F_{n+2} < \left(\frac{7}{4}\right)^n \left(\frac{7}{4} + 1\right)$.

Or $\frac{7}{4} + 1 = \frac{11}{4}$ et $\frac{11}{4} < \frac{49}{16}$ puisque $\frac{49}{16} = \frac{11}{4} + \frac{5}{16}$. Ainsi, il vient que $F_{n+2} < \left(\frac{7}{4}\right)^n \times \frac{49}{16}$ c'est à dire $F_{n+2} < \left(\frac{7}{4}\right)^{n+2}$ c'est à dire que l'on a $\mathcal{P}(n+2)$.

Conclusion : $\mathcal{P}(n)$ étant vraie au rang 1 et au rang 2, et étant héréditaire, elle est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

EX. 2 | Réf. 2320

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{4}{k(k+1)(k+2)}$.

1. Déterminer trois réels a, b et c tels que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{4}{n(n+1)(n+2)} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1} + \frac{c}{n+2}$.
2. Simplifier alors l'expression de u_n.
3. En déduire la limite de $(u_n)_{n\geq 1}$.

EX. 2 | Éléments de correction | Réf. 2320

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:
$$\begin{aligned}\frac{a}{n}+\frac{b}{n+1}+\frac{c}{n+2} &= \frac{a(n+1)(n+2)+bn(n+2)+cn(n+1)}{n(n+1)(n+2)}\\ &= \frac{an^2+3an+2a+bn^2+2bn+cn^2+cn}{n(n+1)(n+2)}\\ &= \frac{n^2(a+b+c)+n(3a+2b+c)+2a}{n(n+1)(n+2)}\end{aligned}$$

Par identification avec le numérateur du quotient $\dfrac{4}{n(n+1)(n+2)}$, il vient le système : $\begin{cases} a+b+c=0\\ 3a+2b+c=0\\ 2a=4\end{cases}$ qui conduit à $a=2$, $b=-4$ et $c=2$.

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{4}{n(n+1)(n+2)} = \dfrac{2}{n}-\dfrac{4}{n+1}+\dfrac{2}{n+2}$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:
$$\begin{aligned} u_n &= \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{2}{k}-\frac{4}{k+1}+\frac{2}{k+2}\right)\\ &= \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{2}{k}-\frac{2}{k+1}\right)+\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{2}{k+2}-\frac{2}{k+1}\right)\\ &= \left(\frac{2}{1}-\frac{2}{n+1}\right)+\left(\frac{2}{n+2}-\frac{2}{2}\right)\\ &= 1+\frac{2}{n+2}-\frac{2}{n+1}\end{aligned}$$

3. Puisque $\dfrac{2}{n+2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et $\dfrac{2}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, il vient par somme que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

EX. 3 | Réf. 2321

Dans $\mathbb{R}^4$, on considère les quatres vecteurs u_1, u_2, u_3 et u_4 identifiés aux vecteurs colonnes :

$$U_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\m\end{pmatrix},\quad U_2=\begin{pmatrix}1\\1\\m\\1\end{pmatrix},\quad U_3=\begin{pmatrix}1\\m\\1\\1\end{pmatrix}\quad \text{et}\quad U_4=\begin{pmatrix}m\\1\\1\\1\end{pmatrix}$$ où m est un paramètre réel.

Pour quelle(s) valeurs de m :

1. $\mathcal{F}=(u_1,\ldots,u_4)$ est-elle génératrice de $\mathbb{R}^4$?

2. $\mathcal{F}=(u_1,\ldots,u_4)$ est-elle une famille libre de $\mathbb{R}^4$?

EX. 3 | Éléments de correction | Réf. 2321

Pour les deux questions, la mise sous forme échelonnée de la matrice associée à cette famille de vecteurs permettra de conclure quant à sa liberté ou son caractère générateur.

$$\begin{pmatrix}1&1&1&m\\1&1&m&1\\1&m&1&1\\m&1&1&1\end{pmatrix} \underset{\substack{L_2\leftarrow L_2-L_1\\ L_3\leftarrow L_3-L_1\\ L_4\leftarrow L_4-mL_1}}{\sim_L} \begin{pmatrix}1&1&1&m\\0&0&m-1&1-m\\0&m-1&0&1-m\\0&1-m&1-m&1-m^2\end{pmatrix} \underset{L_2\leftrightarrow L_3}{\sim_L} \begin{pmatrix}1&1&1&m\\0&m-1&0&1-m\\0&0&m-1&1-m\\0&1-m&1-m&1-m^2\end{pmatrix}$$
$$\underset{L_4\leftarrow L4+L_2}{\sim_L} \begin{pmatrix}1&1&1&m\\0&m-1&0&1-m\\0&0&m-1&1-m\\0&0&1-m&-m^2-m+2\end{pmatrix} \underset{L_4\leftarrow L_4+L_3}{\sim_L} \begin{pmatrix}1&1&1&m\\0&m-1&0&1-m\\0&0&m-1&1-m\\0&0&0&-m^2-2m+3\end{pmatrix}$$

1. La famille $\mathcal{F}$ est une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^4$. Elle sera génératrice si, et seulement si, le nombre de pivots de sa matrice échelonnée est 4. Or, pour que les quatre pivots qui dépendent de m soient tous non nuls, il faut et il suffit que $m \neq 1$ et $m \neq 3$.

2. La famille $\mathcal{F}$ est une famille de 4 vecteurs. Elle sera libre si, et seulement si, le nombre de pivots de sa matrice échelonnée est 4. Or, pour que les quatre pivots qui dépendent de m soient tous non nuls, il faut et il suffit que $m \neq 1$ et $m \neq 3$.