Éléments de réflexion | Pistes de recherche

Les éléments développés ci-après ne sont souvent que des indications pour aboutir à la solution, qui détaillent la plupart du temps un cheminement à suivre pour montrer le rèsultat demandé. La plupart des calculs sont laissés aux lecteurs. . .La mise en forme de certains calculs est faite de sorte à économiser de l'espace et donc du papier, mais il conviendrait de ne pas les écrire en ligne notamment comme cela l'est parfois.

Je m'entraîne à rédiger

EX. 1 | Réf. 4379

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A = (a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq n}} \in \mathcal{O}(n)$.

Montrer que : $\left|\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\right| \leq n$

EX. 1 | Éléments de correction | Réf. 4379

On munit $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de son produit scalaire canonique définit par : $\forall (X,Y) \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \times \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \quad \langle X \,|Y\,\rangle = X^TY$
L'inégalité de Cauchy-Schwarz pour ce produit scalaire est donc : $\forall (X,Y) \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \quad |\langle X \,|Y\,\rangle| \leq \|X\|\,\|Y\|$ c'est à dire : $\left|X^TY\right| \leq \sqrt{X^TX}\sqrt{Y^TY}$
Pour tout $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on a $AX \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, et ainsi, il vient que : $|\langle AX \,|X\,\rangle| \leq \|AX\|\,\|X\|$.
Or puisque $A \in \mathcal{O}(n)$, on sait que A est la représentation matricielle dans une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ d'une isométrie.
Ainsi, il vient que : $\forall X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \quad \|AX\| = X$.
Par suite, on a donc : $|\langle AX \,|X\,\rangle| \leq \|X\|^2$

En particulier pour $X = \begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix}$, on a $\|X\|^2 = \begin{pmatrix}1 & 1 & \dots & 1\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix}$ c'est à dire $\|X\|^2 = n$.

De plus on a : $AX = \begin{pmatrix}a_{11}+a_{12}+\ldots+a_{1n}\\a_{21}+a_{22}+\ldots+a_{2n}\\\vdots\\a_{n1}+a_{n2}+\ldots+a_{nn}\end{pmatrix}$ c'est à dire que $AX = \begin{pmatrix}\displaystyle\sum_{j=1}^{n}a_{1j}\\\displaystyle\sum_{j=1}^{n}a_{2j}\\\vdots\\\displaystyle\sum_{j=1}^{n}a_{nj}\end{pmatrix}$

Par suite, on en déduit que :
$$\begin{aligned}\langle AX \,|X\,\rangle &= \begin{pmatrix}\displaystyle\sum_{j=1}^{n}a_{1j}\\\displaystyle\sum_{j=1}^{n}a_{2j}\\\vdots\\\displaystyle\sum_{j=1}^{n}a_{nj}\end{pmatrix}^T \begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}\displaystyle\sum_{j=1}^{n}a_{1j} & \displaystyle\sum_{j=1}^{n}a_{2j} & \dots & \displaystyle\sum_{j=1}^{n}a_{nj}\end{pmatrix}^T \begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix}\\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\end{aligned}$$

Ainsi, on obtient en appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz à AX et X où $X = \begin{pmatrix}1\\\vdots\\1\end{pmatrix}$ que : $\left|\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\right| \leq n$.

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

EX. 2 | Réf. 4378

1. Montrer que : $\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \displaystyle\int_0^{\pi} \left(\frac{x^2}{2\pi} - x\right)\cos(kx)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{k^2}$

2. Soit $x \in]0;\pi]$.

a. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,x}\dfrac{1-\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,nx}}{1-\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,x}} = \dfrac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,\frac{(n+1)}{2}x}$

b. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\cos(kx) = \frac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)\cos\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$

3. Soit g la fonction définie par : $g : \left|\begin{array}{ccc} [0;\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} \dfrac{\frac{x^2}{2\pi}-x}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \text{ si } x \in]0;\pi] \\ -1 \text{ si } x = 0 \end{cases} \end{array}\right.$

Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0;\pi]$.

4. a. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6} + \int_0^{\pi} g(x)\sin\left(\frac{2n+1}{2}x\right)\mathrm{d}x.$

b. On admet le résultat suivant [a] : Si $\Psi \in \mathcal{C}^1([0;\pi],\mathbb{R})$, alors $\displaystyle\int_0^{\pi}\Psi(x)\sin(\alpha x)\,\mathrm{d}x \underset{\alpha\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$

Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}$ converge et que sa somme vaut $\dfrac{\pi^2}{6}$.

a. C'est ce qu'on appelle le lemme de Lebesgues

EX. 2 | Éléments de correction | Réf. 4378

1. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. À l'aide de l'intégration par parties suivante où l'on pose : $u(x) = \dfrac{x^2}{2\pi} - x \underset{\text{se dérive en}}{\rightsquigarrow} u'(x) = \dfrac{x}{\pi} - 1$, $v(x) = \dfrac{1}{k}\sin(kx) \underset{\text{se dérive en}}{\rightsquigarrow} v'(x) = \cos(kx)$ où u et v sont deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0;\pi]$, on obtient que :

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi}\left(\frac{x^2}{2\pi}-x\right)\cos(kx)\,\mathrm{d}x &= \left[\frac{1}{k}\left(\frac{x^2}{2\pi}-x\right)\sin(kx)\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\frac{1}{k}\left(\frac{x}{\pi}-1\right)\sin(kx)\,\mathrm{d}x \\
&= \underbrace{\frac{1}{k}\frac{\pi^2}{2\pi}\underbrace{\sin(k\pi)}_{=0} - \frac{1}{k}\frac{0^2}{2\pi}\underbrace{\sin(k0)}_{=0}}_{=0} - \frac{1}{k}\int_0^{\pi}\left(\frac{x}{\pi}-1\right)\sin(kx)\,\mathrm{d}x \\
&= -\frac{1}{k}\int_0^{\pi}\left(\frac{x}{\pi}-1\right)\sin(kx)\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

Une deuxième intégration par parties donnera en posant : $u(x) = \dfrac{x}{\pi} - 1 \underset{\text{se dérive en}}{\rightsquigarrow} u'(x) = \dfrac{x}{\pi}$, $v(x) = -\dfrac{1}{k}\cos(kx) \underset{\text{se dérive en}}{\rightsquigarrow} v'(x) = \sin(kx)$ où u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0;\pi]$:

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi}\left(\frac{x^2}{2\pi}-x\right)\cos(kx)\,\mathrm{d}x &= -\frac{1}{k}\left(\left[-\frac{1}{k}\left(\frac{x}{\pi}-1\right)\cos(kx)\right]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}\left(-\frac{1}{k}\cos(kx)\times\frac{1}{\pi}\right)\mathrm{d}x\right)\\
&= -\frac{1}{k}\left(\left(-\frac{1}{k}\underbrace{\left(\frac{\pi}{\pi}-1\right)}_{=0}\cos(\pi x)+\frac{1}{k}\left(\frac{0}{\pi}-1\right)\underbrace{\cos(0x)}_{=1}\right)+\frac{1}{k\pi}\int_0^{\pi}\cos(kx)\,\mathrm{d}x\right)\\
&= -\frac{1}{k}\left(-\frac{1}{k}+\frac{1}{k\pi}\int_0^{\pi}\cos(kx)\,\mathrm{d}x\right)\\
&= \frac{1}{k^2}-\frac{1}{k^2\pi}\underbrace{\left[\frac{1}{k}\sin(kx)\right]_0^{\pi}}_{=0}\\
&= \frac{1}{k^2}
\end{aligned}$$

2. a. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. On a :
$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x}\frac{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,nx}}{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x}} &= \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{nx}{2}}\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\frac{nx}{2}}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{nx}{2}}\right)}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{x}{2}}\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\frac{x}{2}}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{x}{2}}\right)}\\
&= \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{nx}{2}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\frac{x}{2}}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\frac{nx}{2}}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{nx}{2}}}{2\mathrm{i}}\,\frac{2\mathrm{i}}{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\frac{x}{2}}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{x}{2}}}\\
&= \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{n+1}{2}x}\frac{-\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{-\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\\
&= \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{n+1}{2}x}\frac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}
\end{aligned}$$

b. On sait que : $\forall\,(k,x)\in\mathbb{N}\times\mathbb{R},\quad \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,kx}=\cos(kx)+\mathrm{i}\,\sin(kx).$

Ainsi, il vient que : $\forall x\in\left]0;\pi\right],\forall n\in\mathbb{N}^*,$
$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}\cos(kx) &= \mathrm{Re}\left(\sum_{k=1}^{n}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,kx}\right)\\
&= \mathrm{Re}\left(\sum_{k=1}^{n}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x}\right)^k\right)
\end{aligned}$$

Or puisque $x\in\left]0;\pi\right]$, $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x}\neq 1$ et on a : $\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x}\right)^k=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x}\frac{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{nx}{2}}}{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{x}{2}}}$

Or puisque $\dfrac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\in\mathbb{R}$, on en déduit que : $\mathrm{Re}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x}\dfrac{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{nx}{2}}}{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{x}{2}}}\right)=\dfrac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\times\mathrm{Re}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{n+1}{2}x}\right)$

Par ailleurs, puisque : $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{n+1}{2}x}=\cos\left(\dfrac{n+1}{2}x\right)+\mathrm{i}\,\sin\left(\dfrac{n+1}{2}x\right)$, on en déduit que $\mathrm{Re}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{n+1}{2}x}\right)=\cos\left(\dfrac{n+1}{2}x\right)$, et finalement que :

$$\sum_{k=1}^{n}\cos(kx)=\frac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)\cos\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$$

3. Il est clair que la fonction g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\left]0;\pi\right]$.

Continuité en 0 : puisque $\dfrac{x}{2}\underset{x\to 0}{\longrightarrow}0$, on a $\sin\left(\dfrac{x}{2}\right)\underset{x\to 0}{\sim}\dfrac{x}{2}$ et par quotient d'équivalents que : $g(x)\underset{x\to 0}{\sim}\dfrac{\frac{x^2}{2\pi}-x}{2\times\frac{x}{2}}$

Ainsi, on en déduit que : $g(x)\underset{x\to 0}{\sim}\dfrac{x}{2\pi}-1$ et comme $\dfrac{x}{2\pi}-1\underset{x\to 0}{\longrightarrow}-1$, on en déduit que $g(x)\underset{x\to 0}{\longrightarrow}-1=g(0)$, c'est à dire que g est continue en 0.

Limite de g' en 0 : un calcul direct donne que : $\quad \forall x \in]0;\pi]\,,\quad g'(x)$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2\left(\frac{x}{\pi}-1\right)\sin\left(\frac{x}{2}\right)-\left(\frac{x^2}{2\pi}-x\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)}{4\left(\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2}\\
&= \frac{2\left(\frac{x}{\pi}-1\right)\left(\frac{x}{2}+\underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right)\right)-\left(\frac{x^2}{2\pi}-x\right)\left(1-\right.}{4\left(\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2}\\
&= \frac{\frac{x^2}{\pi}-x-\frac{x^2}{2\pi}+x+\underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right)}{4\left(\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2}\\
&= \frac{\frac{x^2}{2\pi}+\underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right)}{4\left(\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2}\\
&= \frac{x^2+\underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right)}{8\pi\left(\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2}
\end{aligned}$$

Puisque $x^2+\underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right)\underset{x\to 0}{\sim} x^2$, on en déduit que : $\quad g(x)\underset{x\to 0}{\sim}\dfrac{x^2}{8\pi\left(\frac{x}{2}\right)^2}$ c'est à dire que $g'(x)\underset{x\to 0}{\sim}\dfrac{1}{2\pi}$. Par suite $g'(x)\underset{x\to 0}{\longrightarrow}\dfrac{1}{2\pi}$.

Ainsi, on a : $\begin{cases} g\in\mathcal{C}^1\left(]0;\pi],\mathbb{R}\right)\\ g'(x)\underset{x\to 0}{\longrightarrow}\dfrac{1}{2\pi}\in\mathbb{R}\\ g \text{ est continue en } 0\end{cases}$

Donc par le théorème de prolongement $\mathcal{C}^1$, la fonction g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

4. a. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. D'après la première question, on a :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} &= \sum_{k=1}^{n}\left(\int_0^{\pi}\left(\frac{x^2}{2\pi}-x\right)\cos(kx)\,\mathrm{d}x\right)\\
&= \int_0^{\pi}\left(\left(\frac{x^2}{2\pi}-x\right)\left(\sum_{k=1}^{n}\cos(kx)\right)\right)\mathrm{d}x\\
&= \int_0^{\pi}\left(\left(\frac{x^2}{2\pi}-x\right)\left(\frac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)\cos\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\right)\right)\mathrm{d}x\\
&= \int_0^{\pi}2g(x)\sin\left(\frac{nx}{2}\right)\cos\left(\frac{n+1}{2}x\right)\mathrm{d}x\\
&= \int_0^{\pi}g(x)\left(\sin\left(\frac{2n+1}{2}x\right)+\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right)\mathrm{d}x\\
&= \int_0^{\pi}g(x)\sin\left(\frac{2n+1}{2}x\right)\mathrm{d}x+\int_0^{\pi}g(x)\sin\left(\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x\\
&= \int_0^{\pi}\left(\frac{x^2}{2\pi}-x\right)\mathrm{d}x+\int_0^{\pi}g(x)\sin\left(\frac{2n+1}{2}x\right)\mathrm{d}x\\
&= \left[\frac{x^3}{6\pi}-\frac{x^2}{2}\right]_0^{\pi}+\int_0^{\pi}g(x)\sin\left(\frac{2n+1}{2}x\right)\mathrm{d}x\\
&= \frac{\pi^2}{6}+\int_0^{\pi}g(x)\sin\left(\frac{2n+1}{2}x\right)\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

b. D'après la question précédente, la fonction g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0;\pi]$. Ainsi puisque $\dfrac{2n+1}{2}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0$, d'après le lemme de Lebesgues, on a que : $\displaystyle\int_0^{\pi}g(x)\sin\left(\frac{2n+1}{2}x\right)\mathrm{d}x\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0$.

Par suite, il vient que : $\displaystyle\frac{\pi^2}{6}+\int_0^{\pi}g(x)\sin\left(\frac{2n+1}{2}x\right)\mathrm{d}x\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}\frac{\pi^2}{6}$, c'est à dire que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}\frac{\pi^2}{6}$, ce qui signifie que la suite des sommes partielles de la série numérique $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{k^2}$ admet une limite finie et ainsi par définition, que la série numérique $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{k^2}$ est convergente et que sa somme vaut $\frac{\pi^2}{6}$, c'est à dire que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Pour s'occuper les jours de pluies

EX. 3 | Réf. 2201

Les deux parties de ce problème ne sont pas indépendantes, dans la mesure où certains résultats établis dans la **partie A** sont réutilisés dans la **partie B**.

Partie A - Un préliminaire mathématique

Soient $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Soient $u_1 = \left(1, \sqrt{2}, 1\right)$, $u_2 = \left(1, -\sqrt{2}, 1\right)$ et $u_3 = (-1, 0, 1)$ trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$.
On note $\mathcal{B}'$ la famille formée par ces trois vecteurs, c'est à dire $\mathcal{B}' = (u_1, u_2, u_3)$.
- **a.** Montrer que la famille $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
- **b.** Écrire la matrice de passage P de la base canonique $\mathcal{B}$ à cette base $\mathcal{B}'$.
- **c.** Déterminer l'inverse de la matrice P.

2. Montrer que $D_1 = P^{-1}AP$ et $D_2 = P^{-1}JP$ sont deux matrices diagonales que l'on explicitera.

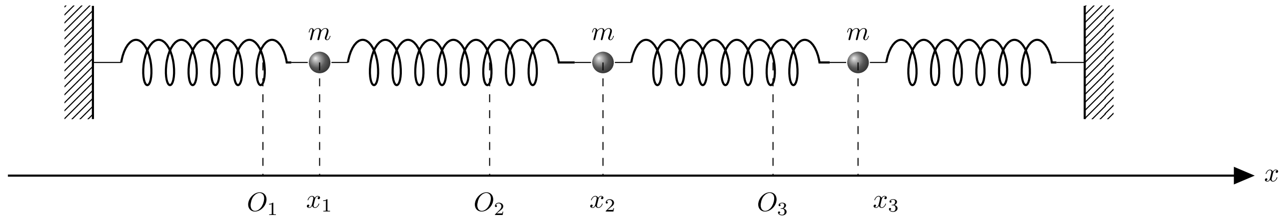
3. On considère le sous-ensemble $\mathcal{F}$ de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ défini par :

$$\mathcal{F} = \left\{ M\left(a, b, c\right) = \begin{pmatrix} a & c & b \\ c & a+b & c \\ b & c & a \end{pmatrix}, (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \right\}$$

- **a.** Montrer que $\mathcal{F} = \mathrm{Vect}\ (I_3, J, A)$.
- **b.** Déduire des questions précédentes que toute matrice $M\left(a, b, c\right)$ de $\mathcal{F}$ peut s'écrire sous la forme $M(a, b, c) = P^{-1}DP$ où D est une matrice diagonale que l'on explicitera.

Partie B - Application à l'étude d'un système d'oscillateurs

On considère un système de 3 oscillateurs couplés, où les 4 ressorts sont identiques et de constante de raideur k.
Les positions des masses m sont repérées par leurs abscisses x_1, x_2 et x_3 à partir de leur position d'origine respective O_1, O_2 et O_3, positions pour lesquelles les ressorts ne sont pas tendus.
On suppose qu'on lâche les masses aux abscisses x_{1m}, x_{2m} et x_{3m} sans vitesse initiale.



On montre alors en appliquant le principe fondamental de la dynamique et en posant $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ avec $\omega_0 \in \mathbb{R}_+^*$, que les abscisses x_1, x_2 et x_3 vérifient le système d'équations différentielles suivant :

$$(\mathcal{S}_d) : \quad \begin{cases} x_1''(t) = -2\omega_0^2 x_1(t) + \omega_0^2 x_2(t) \\ x_2''(t) = \omega_0^2 x_1(t) - 2\omega_0^2 x_2(t) + \omega_0^2 x_3(t) \\ x_3''(t) = \omega_0^2 x_2(t) - 2\omega_0^2 x_3(t) \end{cases}$$

Pour toute la suite, on désignera par $X(t)$, $X'(t)$ et $X''(t)$ les trois vecteurs colonnes :

$$X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix}, \quad X'(t) = \begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ x_3'(t) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad X''(t) = \begin{pmatrix} x_1''(t) \\ x_2''(t) \\ x_3''(t) \end{pmatrix}$$

1. En observant la forme du système $\mathcal{S}_d$, déterminer une matrice $M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $X''(t) = MX(t)$.
   On dit alors que $X''(t) = MX(t)$ est la représentation matricielle du système différentiel $\mathcal{S}_d$.
2. Déterminer trois réels a, b et c pour que M s'écrive sous la forme $M(a, b, c)$ tel que définie dans la **partie A**.
3. En utilisant les résultats de la **partie A**, montrer que l'on peut écrire $PX''(t) = DPX(t)$ où P et D sont deux matrices que l'on précisera.
4. On pose $Y''(t) = PX''(t)$ et $Y(t) = PX(t)$, où l'on écrit $Y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{pmatrix}$ et $Y''(t) = \begin{pmatrix} y_1''(t) \\ y_2''(t) \\ y_3''(t) \end{pmatrix}$.
   Résoudre le système différentiel $\mathcal{S}_d$ est donc équivalent à résoudre le système différentiel $\mathcal{S}_d'$ dont la représentation matricielle est $Y''(t) = DY(t)$.
   a. Effectuer le produit $DY(t)$ pour trouver des équations différentielles satisfaites par y_1'', y_2'' et y_3''.
   b. En déduire que y_1 est solution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants, que l'on résoudra.
   c. En faire de même pour y_2 et y_3.
5. En remarquant que la relation $Y(t) = PX(t)$ permet d'écrire $X(t) = P^{-1}Y(t)$, expliciter alors $x_1(t)$, $x_2(t)$ et $x_3(t)$ en fonction de t et des conditions initiales x_{1m}, x_{2m} et x_{3m}.

EX. 3 | Éléments de correction | `Réf. 2201`

Partie A - Un préliminaire mathématique

1. **a.** Puisque $\mathbb{R}^3$ est un espace vectoriel de dimension 3, pour montrer que la famille $\mathcal{B}'$ qui est une famille de 3 vecteurs de $\mathbb{R}^3$, il suffit de montrer que cette dernière est libre, ce qui sera le cas si le rang de celle-ci est 3.
   On écrit alors la matrice de $\mathcal{B}'$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$, que l'on échelonne en colonne ensuite à l'aide de la méthode du pivot de Gauss :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \underset{\substack{C_2 \leftarrow C_2 - C_1 \\ C_3 \leftarrow C_3 + C_1}}{\sim_C} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \sqrt{2} & 2\sqrt{2} & \sqrt{2} \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \underset{C_3 \leftarrow C_3 - 2C_2}{\sim_C} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \sqrt{2} & 2\sqrt{2} & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

   Puisqu'il y a trois pivots non nuls sur la diagonale de cette matrice triangulaire, on en déduit que le rang de la famille $\mathcal{B}'$ est donc de 3. Par suite, $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

   b. La matrice de passage P de la base canonique $\mathcal{B}$ à cette nouvelle base $\mathcal{B}'$ est clairement $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

   c. On procède à l'inversion de P en utilisant la matrice augmentée $(P|I_3)$ que l'on transforme par opérations sur les lignes suivants un échelonnement réduit en $\left(I_3|P^{-1}\right)$.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - \sqrt{2}L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1}}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2\sqrt{2} & \sqrt{2} & -\sqrt{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - \frac{1}{\sqrt{2}}L_3 \\ L_1 \leftarrow L_1 + \frac{1}{2}L_3}}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & -2\sqrt{2} & 0 & -\frac{1}{2}\sqrt{2} & 1 & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underset{L_1 \leftarrow L_1 + \frac{1}{2\sqrt{2}}L_2}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4}\sqrt{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & -2\sqrt{2} & 0 & -\frac{1}{2}\sqrt{2} & 1 & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underset{\substack{L_2 \leftarrow -\frac{1}{2\sqrt{2}}L_2 \\ L_3 \leftarrow \frac{1}{2}L_3}}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{4} & -\frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$

D'où P est inversible d'inverse $P^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

2. Un calcul direct donne que $D_1=\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $D_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

3. a. On a : $M,a,b,c \in \mathcal{F} \quad \Leftrightarrow \quad$ il existe $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$ tel que $M(a,b,c)=\begin{pmatrix} a & c & b \\ c & a+b & c \\ b & c & a \end{pmatrix}$.

$\Leftrightarrow \quad$ il existe $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$ tel que $M(a,b,c)=aI_3+bJ+cA$

$\Leftrightarrow \quad M(a,b,c)\in \mathrm{Vect}\,(I_3,J,A)$

b. En remarquant que $I_3=P^{-1}I_3P$, on a donc :

$$M(a,b,c)=aP^{-1}I_3P+bP^{-1}D_2P+cP^{-1}D_1P \text{ soit } M(a,b,c)=P^{-1}\underbrace{(aI_3+bD_2+cD_1)}_{=D}P$$

où l'on a explicitement $D=\begin{pmatrix} a+b+c\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & a+b-c\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & a-b \end{pmatrix}$.

Partie B - Application à l'étude d'un système d'oscillateurs

1. En posant $M=\begin{pmatrix} -2\omega_0^2 & \omega_0^2 & 0 \\ \omega_0^2 & -2\omega_0^2 & \omega_0^2 \\ 0 & \omega_0^2 & -2\omega_0^2 \end{pmatrix}$, il vient bien $X''(t)=MX(t)$.

2. En posant $a=-2\omega_0^2$ et $b=0$ et $c=\omega_0^2$, il vient que :

$$M=\begin{pmatrix} -2\omega_0^2 & \omega_0^2 & 0 \\ \omega_0^2 & -2\omega_0^2 & \omega_0^2 \\ 0 & \omega_0^2 & -2\omega_0^2 \end{pmatrix}=-2\omega_0^2I_3+0J+\omega_0^2A$$

3. D'après la question **(3)(b)** de la **partie A**, la matrice M peut s'écrire sous la forme $P^{-1}\underbrace{\begin{pmatrix} -2\omega_0^2+\omega_0^2\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & -2\omega_0^2-\omega_0^2\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & -2\omega_0^2 \end{pmatrix}}_{=D}P$ avec $P=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Ainsi : $X''(t)=P^{-1}DPX(t) \quad \Leftrightarrow \quad PX''(t)=DPX(t)$.

4. a. On a directement : $DY(t)=\begin{pmatrix} \left(-2\omega_0^2+\omega_0^2\sqrt{2}\right)y_1(t) \\ \left(-2\omega_0^2-\omega_0^2\sqrt{2}\right)y_2(t) \\ -2\omega_0^2y_3(t) \end{pmatrix}$.

On en déduit alors que : $\begin{cases} y_1''(t)=\left(-2\omega_0^2+\omega_0^2\sqrt{2}\right)y_1(t) \\ y_2''(t)=\left(-2\omega_0^2-\omega_0^2\sqrt{2}\right)y_2(t) \\ y_3''(t)=-2\omega_0^2y_3(t) \end{cases}$.

b. y_1 est donc solution de l'équation différentielle (E_1) : $y''+\omega_0^2\left(2-\sqrt{2}\right)y=0$, dont les solutions sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions de la forme $t\longmapsto a_1\sin\left(\omega t\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)+b_1\cos\left(\omega t\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)$, où a_1 et b_1 sont deux réels à déterminer.

c.
- y_2 est quant à elle solution de l'équation différentielle (E_2) : $y''+\omega_0^2\left(2+\sqrt{2}\right)y=0$, dont les solutions sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions $t\longmapsto a_2\sin\left(\omega t\sqrt{\sqrt{2}+2}\right)+b_2\cos\left(\omega t\sqrt{\sqrt{2}+2}\right)$, où a_2 et b_2 sont deux réels à déterminer.
- y_3 est solution de l'équation différentielle (E_3) : $y''+2\omega_0^2y=0$, dont les solutions sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions $t\longmapsto a_3\sin\left(\omega t\sqrt{2}\right)+a_3\sin\left(\omega t\sqrt{2}\right)$ où $a_3$et b_3 sont deux réels à déterminer.

5. Le produit $P^{-1}Y(t)$ donne alors :

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{4}\,a_1\sin\big(\omega\,t\sqrt{2-\sqrt{2}}\big)+\frac{1}{4}\,b_1\cos\big(\omega\,t\sqrt{2-\sqrt{2}}\big)+\frac{1}{4}\,\sqrt{2}\,\Big(a_2\sin\big(\omega\,t\sqrt{2+\sqrt{2}}\big)+b_2\cos\big(\omega\,t\sqrt{2+\sqrt{2}}\big)\Big)+\frac{1}{4}\,a_3\sin(\omega \\ \frac{1}{4}\,a_1\sin\big(\omega\,t\sqrt{2-\sqrt{2}}\big)+\frac{1}{4}\,b_1\cos\big(\omega\,t\sqrt{2-\sqrt{2}}\big)-\frac{1}{4}\,\sqrt{2}\,\Big(a_2\sin\big(\omega\,t\sqrt{2+\sqrt{2}}\big)+b_2\cos\big(\omega\,t\sqrt{2+\sqrt{2}}\big)\Big)+\frac{1}{4}\,a_3\sin(\omega \\ -\frac{1}{2}\,a_1\sin\big(\omega\,t\sqrt{2-\sqrt{2}}\big)-\frac{1}{2}\,b_1\cos\big(\omega\,t\sqrt{2-\sqrt{2}}\big)+\frac{1}{2}\,a_3\sin\big(\omega\,t\sqrt{2}\big)+\frac{1}{2}\,b_3\cos\big(\omega\,t\sqrt{2}\big) \end{pmatrix}$$

qui permet d'obtenir alors les expressions de $x_1(t)$, $x_2(t)$ et $x_3(t)$.
Les conditions initiales à utiliser pour identifier les coefficients a_1, b_1, a_2, b_2, a_3 et b_3 sont :

$$x_1(0)=x_{1m},\quad x_2(t0)=x_{2m},\quad x_3(0)=x_{3m},\quad x_1'(0)=0,\quad x_2'(0)=0 \qquad \text{et} \qquad x_3'(0)=0$$

qui donneront :

$$x_1(t)=\cos\big(\sqrt{2}\omega\,t\big)\left(\frac{1}{2}\,x_{1m}-\frac{1}{2}\,x_{3m}\right)-\frac{1}{8}\,\big(-x_{1m}+x_{2m}\sqrt{2}-x_{3m}\big)\cos\left(\sqrt{2+\sqrt{2}}\omega\,t\right)+\frac{1}{8}\,\big(x_{1m}+x_{2m}\sqrt{2}+x_{3m}\big)\cos$$

$$x_2(t)=\frac{1}{8}\,\big(-x_{1m}+x_{2m}\sqrt{2}-x_{3m}\big)\sqrt{2}\cos\left(-\sqrt{2+\sqrt{2}}\omega\,t\right)+\frac{1}{8}\,\big(x_{1m}+x_{2m}\sqrt{2}+x_{3m}\big)\sqrt{2}\cos\left(-\sqrt{-2+\sqrt{2}}\omega\,t\right)$$

$$x_3(t)=\frac{1}{8}\,\big(-x_{1m}+x_{2m}\sqrt{2}-x_{3m}\big)\sin\left(\sqrt{2+\sqrt{2}}\omega\,t\right)+\frac{1}{8}\,\big(x_{1m}+x_{2m}\sqrt{2}+x_{3m}\big)\cos\left(-\sqrt{2+\sqrt{2}}\omega\,t\right)-\cos\big(\sqrt{2}\omega\,t\big)$$