Consignes générales | Important

On attachera une **grande importance à la rédaction des réponses**, résoudre un exercice de mathématiques ne consiste nullement à produire un enchaînement ou enchevêtrement d'écritures algébriques sans explications ou commentaires. La longueur d'une réponse n'a rien à voir avec la longueur de la question... **On fera donc apparaître tous les résultats et raisonnements intermédiaires qui ont permis d'aboutir à la solution**.

Dans le cas où un(e) étudiant(e) repère ce qui lui semble être une **erreur d'énoncé**, il (elle) le signale très rapidement au **professeur**.

Un peu de technique

EX. 1 | Réf. 2396

Soit $\mathcal{F} = (u_1, u_2, u_3)$ la famille de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ où : $u_1 = (1, a, 3)$, $u_2 = (1, 1, a)$, et $u_3 = (a, 1, 3)$ où a étant un réel quelconque.

Étudier, suivant les valeurs du réel a, la liberté de la famille $\mathcal{F}$ et préciser, chaque fois qu'elle est liée, une relation de dépendance entre les vecteurs de la famille.

EX. 2 | Réf. 2397

On considère la famille $\mathcal{F} = (e_1, \ldots, e_4)$ de vecteurs de $\mathbb{R}^4$ où :

$$e_1 = (1,1,1,1), \quad e_2 = (0,1,2,1), \quad e_3 = (1,0,-2,3) \text{ et } e_4 = (1,1,2,-2).$$

1. La famille $\mathcal{F}$ est-elle libre ? Est-elle génératrice de $\mathbb{R}^4$?
2. Déterminer une relation entre les nombres réels α et β pour que le vecteur $u = (1, 1, \alpha, \beta)$ appartienne à $\mathrm{Vect}\,(\mathcal{F})$.

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

EX. 3 | Réf. 3219

On se propose dans cet exercice d'écrire plusieurs fonctions en `Python` permettant de vérifier si trois vecteurs de l'espace forment une base orthonormée directe de l'espace, sans utiliser les fonctions existantes des modules `scipy` ou `numpy` de `Python`.

Pour cela, on supposera qu'un vecteur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ sera représenté par la liste `[x,y,z]`.

1. Écrire une fonction `prodscal(u,v)` en `Python` qui répond aux spécifications suivantes :

Nom de la fonction :	`prodscal`
Paramètre(s) :	`u` liste de 3 nombres et `v` liste de trois nombres
Valeur renvoyée :	la valeur du produit scalaire $\overrightarrow{u}\,.\,\overrightarrow{v}$ où $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont représentés par les listes `u` et `v`

2. Écrire une fonction `prodvect(u,v)` en `Python` qui répond aux spécifications suivantes :

Nom de la fonction :	`prodvect`
Paramètre(s) :	`u` liste de 3 nombres et `v` liste de trois nombres
Valeur renvoyée :	une liste de trois nombres donnant les coordonnées du produit vectoriel $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$ où $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont représentés par les listes `u` et `v`

3. À l'aide des deux fonctions précédemment écrites, écrire une fonction `base(u,v,w)` en `Python` qui répond aux spécifications suivantes :

Nom de la fonction :	`base`
Paramètre(s) :	`u` liste de 3 nombres, `v` liste de 3 nombres et `w` liste de 3 nombres
Valeur renvoyée :	`True` si la famille formée par les vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ représentés par les listes `u`, `v` et `w` est une base de vecteurs de l'espace, et `False` sinon.

4. À l'aide de la fonction `prodscal` et de la fonction `base`, écrire une fonction `baseortho(u,v,w)` en `Python` qui répond aux spécifications suivantes :

Nom de la fonction :	`baseortho`
Paramètre(s) :	`u` liste de 3 nombres, `v` liste de 3 nombres et `w` liste de 3 nombres
Valeur renvoyée :	`True` si la famille formée par les vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ représentés par les listes `u`, `v` et `w` est une base orthonormée de vecteurs de l'espace, et `False` sinon.