Consignes générales | Important

On attachera une **grande importance à la rédaction des réponses**, résoudre un exercice de mathématiques ne consiste nullement à produire un enchaînement ou enchevêtrement d'écritures algébriques sans explications ou commentaires. La longueur d'une réponse n'a rien à voir avec la longueur de la question... **On fera donc apparaître tous les résultats et raisonnements intermédiaires qui ont permis d'aboutir à la solution**.

Dans le cas où un(e) étudiant(e) repère ce qui lui semble être une **erreur d'énoncé**, il (elle) le signale très rapidement au **professeur**.

Un peu de technique

EX. 1 | Réf. 2145

1. Développer $(a+b)^3$ et $3(a+1)^3 - 2\left(3a^2-2\right)$, où $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.
2. Montrer que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 3, on a :
$$(n+1)^3 \leq 3n^3$$
3. Montrer que pour tout entier naturel n, on a : $3^n \geq n^3$.

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

EX. 2 | Réf. 2152

Pour tout entier naturel n, on pose :
$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{3^k} \qquad \text{et} \qquad T_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{3^k}$$

1. Montrer que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
2. Exprimer S_n en fonction de n, puis déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.
3. En déduire que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par $\dfrac{3}{2}$.
4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $\quad T_{n+1} = \dfrac{T_n + S_n}{3}$.
5. Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad T_n \leq 1$.
6. Montrer que la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
7. En déduire la convergence et la limite de la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$.