Consignes générales | Important

On attachera une **grande importance à la rédaction des réponses**, résoudre un exercice de mathématiques ne consiste nullement à produire un enchaînement ou enchevêtrement d'écritures algébriques sans explications ou commentaires. La longueur d'une réponse n'a rien à voir avec la longueur de la question... **On fera donc apparaître tous les résultats et raisonnements intermédiaires qui ont permis d'aboutir à la solution**.

Dans le cas où un(e) étudiant(e) repère ce qui lui semble être une **erreur d'énoncé**, il (elle) le signale très rapidement au **professeur**.

Un peu de technique

EX. 1 | Réf. 4614

On considère la série numérique $\displaystyle\sum_{n\geq 1} u_n$ où : $u_n = \dfrac{\sin\left(\dfrac{1}{n(n+1)}\right)}{\cos\left(\dfrac{1}{n}\right)\cos\left(\dfrac{1}{n+1}\right)}$.

1. Montrer que $\displaystyle\sum_{n\geq 1} u_n$ est une série numérique convergente.

2. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \tan\left(\dfrac{1}{n}\right) - \tan\left(\dfrac{1}{n+1}\right)$.

3. Déduire de ce qui précède $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$.

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

EX. 2 | Réf. 4378

1. Montrer que : $\forall k \in \mathbb{N}^*,\quad \displaystyle\int_0^{\pi} \left(\frac{x^2}{2\pi} - x\right)\cos(kx)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{k^2}$

2. Soit $x \in \,]0;\pi]$.

a. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\quad \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x}\dfrac{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,nx}}{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x}} = \dfrac{\sin\left(\dfrac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\dfrac{x}{2}\right)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{(n+1)}{2}x}$

b. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\quad \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\cos(kx) = \frac{\sin\left(\dfrac{nx}{2}\right)\cos\left(\dfrac{(n+1)x}{2}\right)}{\sin\left(\dfrac{x}{2}\right)}$

3. Soit g la fonction définie par : $g : \begin{array}{|ccl} [0;\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} \dfrac{\dfrac{x^2}{2\pi}-x}{2\sin\left(\dfrac{x}{2}\right)} & \text{si } x \in\,]0;\pi] \\ -1 & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{array}$

Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0;\pi]$.

4. a. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\quad \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6} + \int_0^{\pi} g(x)\sin\left(\frac{2n+1}{2}x\right)\mathrm{d}x.$

b. On admet le résultat suivant [a] : Si $\Psi \in \mathcal{C}^1([0;\pi],\mathbb{R})$, alors $\displaystyle\int_0^{\pi}\Psi(x)\sin(\alpha x)\,\mathrm{d}x \underset{\alpha\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$

Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}$ converge et que sa somme vaut $\dfrac{\pi^2}{6}$.

a. C'est ce qu'on appelle le lemme de Lebesgues