Consignes générales | Important

On attachera une **grande importance à la rédaction des réponses**, résoudre un exercice de mathématiques ne consiste nullement à produire un enchaînement ou enchevêtrement d'écritures algébriques sans explications ou commentaires. La longueur d'une réponse n'a rien à voir avec la longueur de la question... **On fera donc apparaître tous les résultats et raisonnements intermédiaires qui ont permis d'aboutir à la solution**.

Dans le cas où un(e) étudiant(e) repère ce qui lui semble être une **erreur d'énoncé**, il (elle) le signale très rapidement au **professeur**.

Travailler les fondamentaux

EX. 1 | Réf. 4633

On considère le couple de variables aléatoires (X, Y) dont on donne la loi conjointe dans le tableau ci-contre.

$X \backslash Y$	0	1	2	3
1	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$
2	$\frac{1}{10}$	0	0	$\frac{1}{10}$
3	$\frac{1}{10}$	0	$\frac{2}{10}$	0

1. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?
2. Soit $U = X \times Y$. Déterminer la loi de U.
3. Soit $V = \min(X, Y)$. Déterminer la loi de V.
4. Déterminer ensuite la loi conjointe du couple (U, V).

EX. 2 | Réf. 4632

Une urne contient 2 boules blanches et $n-2$ boules rouges.
On effectue n tirages sans remise dans cette urne.
On appelle X le rang de sortie de la première boule blanche, et Z le rang de sortie de la deuxième boule blanche.
Pour tout $i \in [\![1; n]\!]$, on désigne par B_i(resp. R_i) l'événement « obtenir une boule blanche (resp. rouge) au i^{e} tirage ».

1. Déterminer du loi couple (X, Z).
2. En déduire la loi de Z.

Préparation à l'oral

EX. 3 | Réf. 4634

Soit $c \in]0; 1[$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, et on définit la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : $\forall n \in \mathbb{N},\ p_n = \dfrac{\alpha c^n}{n!}$.

1. Déterminer la valeur de α pour que la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ puisse définir une probabilité $\mathbb{P}$ sur $\mathbb{N}$ en posant : $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(\{n\}) = p_n$.
2. Déterminer alors la probabilité de l'événement $\mathcal{I}$: « être impair ».

Mobiliser toutes ses connaissances

EX. 4 | Réf. 4635

On dispose d'une boîte qui contient deux jetons, un noir et un blanc.
On procède à une succession de n tirages dans cette boîte en le remettant entre chaque tirage après en avoir noté la couleur.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on désigne par A_n et D_n les événements suivants :

A_n : « on obtient des jetons des deux couleurs au cours des n tirages »

D_n : « on obtient au plus un jeton noir »

1. Déterminer $\mathbb{P}(A_n)$ et $\mathbb{P}(D_n)$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$.
2. Dans le cas où $n = 2$, les deux événements A_n et D_n sont-ils indépendants ?
3. Même question dans le cas où $n = 3$.

Pour s'occuper les jours de pluies

EX. 5 | Réf. 1400

Soit n un entier naturel non nul.
Une urne contient $2n$ boules indiscernables au toucher : deux boules portant le numéro 1, deux boules portant le numéro 2, ..., deux boules portant le numéro n.
On effectue une succession de tirages de deux boules de cette urne selon le protocole suivant :

- si les deux boules obtenues portent le même numéro, elles sont définitivement éliminées ;
- si les deux boules portent des numéros différents, elles sont remises dans l'urne avant le tirage suivant.

On note X_n la variable aléatoire égale au nombre nécesaires pour vider complètement l'urne.
On note Y_1 la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour obtenir une première paire de boules portant le même numéro et pour tout $i \in [\![2;n]\!]$, on note Y_i la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour obtenir une i^{e} paire de boules portant le même numéro, à partir d'une $(i-1)^{\text{e}}$ paire de boules.

1. **a.** Quelle relation lie X_n à Y_1, Y_2, ..., Y_n ?

b. Déterminer la loi de Y_1.
Plus généralement, déterminer pour $i \in [\![1;n]\!]$ la loi de Y_i. Quelle est son espérance.

c. En déduire que $\mathbb{E}(X_n) = n^2$.

2. **a.** Dans le cas $n = 1$, puis $n = 2$, déterminer la loi de X_n.

b. On suppose $n = 3$. Montrer que :

$$\forall k \geq 3, \quad \mathbb{P}([X_3 = k]) = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{4}{5}\right)^{k-2} - \left(\frac{2}{3}\right)^{k-2}\right)$$

3. On revient au cas général.

a. Montrer que $\mathbb{P}([X_n = n]) = \dfrac{2^n n!}{(2n)!}$.

b. Exprimer $\mathbb{P}([X_n = n+1])$ à l'aide de termes de la suite $(h_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ définie pour tout entier k non nul par $h_k = \displaystyle\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{i}$.