Consignes générales | Important

On attachera une **grande importance à la rédaction des réponses**, résoudre un exercice de mathématiques ne consiste nullement à produire un enchaînement ou enchevêtrement d'écritures algébriques sans explications ou commentaires. La longueur d'une réponse n'a rien à voir avec la longueur de la question...**On fera donc apparaître tous les résultats et raisonnements intermédiaires qui ont permis d'aboutir à la solution**.

Dans le cas où un(e) étudiant(e) repère ce qui lui semble être une **erreur d'énoncé**, il (elle) le signale très rapidement au **professeur**.

Je m'entraîne à rédiger

EX. 1 | Réf. 4373

On munit $\mathbb{R}^3$ de sa structure euclidienne canonique orienté par la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
On considère alors f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ tel que sa matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est $A = -\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 1 & \sqrt{6} \\ 1 & 3 & -\sqrt{6} \\ -\sqrt{6} & \sqrt{6} & 2 \end{pmatrix}$.
Identifier f.

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

EX. 2 | Réf. 0881

On munit $\mathbb{R}^3$ de sa structure euclidienne orientée canonique.
Soit $\overrightarrow{a} \in \mathbb{R}^3$ non nul. On définit alors l'application φ :

$$\varphi : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ \overrightarrow{x} & \longmapsto & \overrightarrow{a} \wedge \left(\overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{x}\right) \end{array} \right.$$

1. Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.

2. Déterminer la matrice de φ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ pour $\overrightarrow{a} = (a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$.
On pourra admettre que : $\forall \left(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}\right) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3, \quad \overrightarrow{a} \wedge \left(\overrightarrow{b} \wedge \overrightarrow{c}\right) = \left\langle \overrightarrow{a} \middle| \overrightarrow{c} \right\rangle \overrightarrow{b} - \left\langle \overrightarrow{a} \middle| \overrightarrow{b} \right\rangle \overrightarrow{c}$

3. Montrer que φ est diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

4. Montrer que $\overrightarrow{a}$ est un vecteur propre pour φ et en donner la valeur propre associée.

5. Montrer que $-\left\|\overrightarrow{a}\right\|^2$ est une valeur propre de φ et caractériser le sous-espace propre associé.
Donner alors tous les sous-espaces propres de φ.

6. On suppose dans cette question que $\left\|\overrightarrow{a}\right\| = 1$.

- **a.** Montrer que l'on a $\varphi \circ \varphi = -\varphi$.
- **b.** Caractériser géométriquement φ.

Pour s'occuper les jours de pluies

EX. 3 | Réf. 1566

Soit $p \in \mathbb{N}$ avec $p \geq 2$, et $A \in \mathscr{M}_p(\mathbb{R})$.
Dans tout l'exercice, on identifiera les éléments de $\mathbb{R}^n$ aux matrices colonnes de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
On dit qu'une suite $(U_n)_{n\geq 0}$ de matrices de $\mathscr{M}_p(\mathbb{R})$ converge vers une matrice $U \in \mathscr{M}_p(\mathbb{R})$, si chaque coefficient de U_n converge, quand n tend vers $+\infty$ vers le coefficient correspondant de U.

1. **a.** Montrer que la matrice $A^T A$ est une matrice symétrique réelle te que ses valeurs propres sont positives.
On note alors c sa plus grande valeur propre.

b. On se place dans $\mathbb{R}^p$ muni du produit scalaire canonique et on note encore A l'endomorphisme canoniquement associé à A.

Montrer que : $\forall \overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^p, \quad \left\|A\overrightarrow{x}\right\|^2 \leq c\left\|\overrightarrow{x}\right\|^2$.

c. En déduire que : $\forall \left(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}\right) \in (\mathbb{R}^p)^2, \forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \left|\left\langle A^k\overrightarrow{x} \,\middle|\, \overrightarrow{y}\right\rangle\right| \leq c^{\frac{k}{2}} \left\|\overrightarrow{x}\right\| \left\|\overrightarrow{y}\right\|$.

2. a. Soit $\mathcal{B} = \left(\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_p}\right)$ la base canonique de $\mathbb{R}^p$.

Pour $(i,j) \in [\![1;p]\!]^2$, montrer que la série $\displaystyle\sum_{k\geq 0} \frac{\left\langle A^k\overrightarrow{e_i} \,\middle|\, \overrightarrow{e_j}\right\rangle}{k!}$ converge.

b. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $B_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{A^k}{k!}$. Montrer que la suite $(B_n)_{n\geq 0}$ converge. Sa limite est notée $\exp(A)$.

c. Montrer que si λ est valeur propre de A, alors e^{λ} est une valeur propre de $\exp(A)$.