Important

On attachera une **grande importance à la rédaction des réponses**, résoudre un exercice de mathématiques ne consiste nullement à produire un enchaînement ou enchevêtrement d'écritures algébriques sans explications ou commentaires. La longueur d'une réponse n'a rien à voir avec la longueur de la question... **On fera donc apparaître tous les résultats et raisonnements intermédiaires qui ont permis d'aboutir à la solution**.

Dans le cas où un(e) étudiant(e) repère ce qui lui semble être une **erreur d'énoncé**, il (elle) le signale très rapidement au **professeur**.

Un peu de technique

Exercice| [5184] | 1| Réduction d'une matrice à coefficients réels de taille 3×3

Diagonaliser la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ dans $\mathbb{R}$.

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

Exercice| [4948] | 2| Tirages dans une urne | ESCP 2019 Filière BL

On effectue une suite de tirages au hasard dans une urne, qui contient initialement une boule blanche et une boule noire, de la manière suivante :

- à chaque tirage d'une boule blanche, on replace cette boule dans l'urne, puis l'on rajoute des boules blanches jusqu'à avoir multiplié par deux le nombre de boules blanches dans l'urne ;
- si l'on tire la boule noire, on arrête les tirages.

Ainsi, le nombre de boules blanches dans l'urne est multiplié par deux à chaque étape (sauf la dernière). On admet que l'expérience aléatoire est modélisée par un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note B_n l'événement « les n premiers tirages ne donnent que des boules blanches » et l'on pose $u_n = \mathbb{P}(B_n)$.

(1). Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est convergente.

(2). Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que : $\quad \mathbb{P}(B_n) = \displaystyle\prod_{k=0}^{n-1} \frac{2^k}{1+2^k}$.

(3). On note B l'événement « les tirages ne s'arrêtent jamais ».

(a). Exprimer B en fonction des B_n.
On admet pour la suite que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathbb{P}(B)$.

(b). Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que : $\quad -\ln(u_n) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \ln\left(1+2^{-k}\right)$.

(c). Montrer la convergence de la série $\displaystyle\sum_{k\geq 0} \ln\left(1+2^{-k}\right)$.

(d). En déduire que $\mathbb{P}(B) \neq 0$.