Important

On attachera une **grande importance à la rédaction des réponses**, résoudre un exercice de mathématiques ne consiste nullement à produire un enchaînement ou enchevêtrement d'écritures algébriques sans explications ou commentaires. La longueur d'une réponse n'a rien à voir avec la longueur de la question... **On fera donc apparaître tous les résultats et raisonnements intermédiaires qui ont permis d'aboutir à la solution**.

Dans le cas où un(e) étudiant(e) repère ce qui lui semble être une **erreur d'énoncé**, il (elle) le signale très rapidement au **professeur**.

Un peu de technique

Exercice| [5004] | 1| Inégalité de Cauchy-Schwarz

Soit $n \in \mathbb{N}$.
On considère $a_1, a_2, \dots, a_n$ et $b_1, b_2, \dots, b_n$ des réels.

(1). On définit la fonction p par : $p : \begin{array}{|lcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} (a_i x + b_i)^2 \end{array}$.

Justifier que p est une fonction polynôme de degré 2.

(2). Déterminer de discriminant Δ de p.

(3). En remarquant et en justifiant que p est une fonction positive, montrer que :

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)$$

Exercice| [5005] | 2| Histoire de téléscopage | Transformation d'Abel

(1). On considère deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de nombres réels. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=0}^{n} a_k \left(b_{k+1} - b_k\right) = a_n b_{n+1} - a_0 b_0 + \sum_{k=1}^{n} \left(a_{k-1} - a_k\right) b_k$$

(2). Justifier que : $\forall k \in \mathbb{N},\ 2^k = 2^{k+1} - 2^k$

puis montrer que : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k 2^k = 2^{n+1}(n-1) + 2$

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

Exercice| [5003] | 3| Déclinaison autour du binôme de Newton

Dans tout cet exercice x désigne un réel strictement positif et n un entier naturel supérieur ou égal à 1.

On pose alors : $S = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{2n}{2k} x^k$ et $T = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n}{2k+1} x^k$.

(1). Soit $t \in \mathbb{R}$. Exprimer en fonction de t et de n, les deux sommes $U = \displaystyle\sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} t^k$ et $V = \displaystyle\sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} (-t)^k$.

(2). En prenant $t = \sqrt{x}$, vérifier que l'on a les relations $\begin{cases} S + tT = U \\ S - tT = V \end{cases}$.

(3). Exprimer alors $U + V$ et $U - V$ en fonction de S, T et t avec $t = \sqrt{x}$.

(4). En déduire alors les expressions de S et T en fonction de x et de n.