Éléments de correction

Les indications qui suivent ne sont là que pour vous aider à démarrer la résolution des situations proposées. Elles sont énoncées en s'appuyant sur les éléments développés en cours. D'autres solutions ou pistes de résolution sont bien évidemment possibles et vous êtes vivement encouragés à les mener jusqu'au bout. Si certains points du devoir restent délicats à mettre en oeuvre, n'hésitez pas à me solliciter, ou même à en discuter avec vos camarades, de tels échanges étant très souvent bénéfiques!

Il est peu pertinent et presque inutile de s'approprier sans réflexion le travail d'un autre puisque de toute façon, la sanction tombera d'elle même lors des évaluations en classe en temps limité.

Un peu de technique

EX. 1 | Réf. 2396

Soit $\mathcal{F} = (u_1, u_2, u_3)$ la famille de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ où : $u_1 = (1, a, 3)$, $u_2 = (1, 1, a)$, et $u_3 = (a, 1, 3)$ où a étant un réel quelconque.

Étudier, suivant les valeurs du réel a, la liberté de la famille $\mathcal{F}$ et préciser, chaque fois qu'elle est liée, une relation de dépendance entre les vecteurs de la famille.

EX. 1 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 2396

- On écrit la matrice A de cette famille de vecteurs.
- On procède à un échelonnement de la matrice jusqu'à rencontrer des opérations qui sont conditionnées par la valeur de a, ou si ce n'est pas le cas, d'avoir A équivalente en ligne à une matrice triangulaire supérieure dont les pivots dépendent de a.
- On discute alors du nombre de pivots en fonction de a.
- Puis on étudie les cas exclus par les valeurs de a pour la liberté de la famille $\mathcal{F}$.

EX. 2 | Réf. 2397

On considère la famille $\mathcal{F} = (e_1, \ldots, e_4)$ de vecteurs de $\mathbb{R}^4$ où :

$$e_1 = (1,1,1,1), \quad e_2 = (0,1,2,1), \quad e_3 = (1,0,-2,3) \text{ et } e_4 = (1,1,2,-2).$$

1. La famille $\mathcal{F}$ est-elle libre ? Est-elle génératrice de $\mathbb{R}^4$?
2. Déterminer une relation entre les nombres réels α et β pour que le vecteur $u = (1, 1, \alpha, \beta)$ appartienne à $\mathrm{Vect}\,(\mathcal{F})$.

EX. 2 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 2397

1. On écrit la matrice de la famille de vecteurs, puis on procède à un échelonnement pour en déterminer le nombre de pivots en donnant bien évidemment les arguments pour justifier que c'est cela qu'il faut faire.
2. On traduit cette relation à l'aide d'un système en se souvenant de ce qu'est par définition $\mathrm{Vect}\,(F)$, dont il faut discuter de la compatibilité.

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

EX. 3 | Réf. 3219

On se propose dans cet exercice d'écrire plusieurs fonctions en `Python` permettant de vérifier si trois vecteurs de l'espace forment une base orthonormée directe de l'espace, sans utiliser les fonctions existantes des modules `scipy` ou `numpy` de `Python`.

Pour cela, on supposera qu'un vecteur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ sera représenté par la liste `[x,y,z]`.

1. Écrire une fonction `prodscal(u,v)` en `Python` qui répond aux spécifications suivantes :

Nom de la fonction :	`prodscal`
Paramètre(s) :	`u` liste de 3 nombres et `v` liste de trois nombres
Valeur renvoyée :	la valeur du produit scalaire $\overrightarrow{u}\,.\,\overrightarrow{v}$ où $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont représentés par les listes `u` et `v`

2. Écrire une fonction `prodvect(u,v)` en `Python` qui répond aux spécifications suivantes :

Nom de la fonction :	`prodvect`
Paramètre(s) :	`u` liste de 3 nombres et `v` liste de trois nombres
Valeur renvoyée :	une liste de trois nombres donnant les coordonnées du produit vectoriel $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$ où $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont représentés par les listes `u` et `v`

3. À l'aide des deux fonctions précédemment écrites, écrire une fonction `base(u,v,w)` en `Python` qui répond aux spécifications suivantes :

Nom de la fonction :	`base`
Paramètre(s) :	`u` liste de 3 nombres, `v` liste de 3 nombres et `w` liste de 3 nombres
Valeur renvoyée :	`True` si la famille formée par les vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ représentés par les listes `u`, `v` et `w` est une base de vecteurs de l'espace, et `False` sinon.

4. À l'aide de la fonction `prodscal` et de la fonction `base`, écrire une fonction `baseortho(u,v,w)` en `Python` qui répond aux spécifications suivantes :

Nom de la fonction :	`baseortho`
Paramètre(s) :	`u` liste de 3 nombres, `v` liste de 3 nombres et `w` liste de 3 nombres
Valeur renvoyée :	`True` si la famille formée par les vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ représentés par les listes `u`, `v` et `w` est une base orthonormée de vecteurs de l'espace, et `False` sinon.

EX. 3 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 3219

1. Se souvenir de la formule de calcul du produit scalaire de deux vecteurs en base orthonormée et la mettre en oeuvre en se souvenant que `u[0]` renverra la 1e valeur (numérique) de la liste `u` et donc la première composante du vecteur $\overrightarrow{u}$.
2. Se souvenir des calculs à mener pour déterminer le produit vectoriel de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.
3. Trois vecteurs forment une base de vecteurs de l'espace lorsque leur produit mixte est égal à 0, et le produit mixte se calcule à l'aide d'un produit scalaire et d'un produit vectoriel...
4. Il faut s'assurer que les trois vecteurs forment une base et que la norme de chacun d'entre eux est égale à 1 et que les vecteurs sont orthogonaux deux à deux...

   Pour calculer la norme d'un vecteur il faut peut-être se souvenir que $\left\|\overrightarrow{u}\right\|^2 = \overrightarrow{u}\,.\,\overrightarrow{u}$.