Éléments de correction

Les indications qui suivent ne sont là que pour vous aider à démarrer la résolution des situations proposées. Elles sont énoncées en s'appuyant sur les éléments développés en cours. D'autres solutions ou pistes de résolution sont bien évidemment possibles et vous êtes vivement encouragés à les mener jusqu'au bout. Si certains points du devoir restent délicats à mettre en oeuvre, n'hésitez pas à me solliciter, ou même à en discuter avec vos camarades, de tels échanges étant très souvent bénéfiques!

Il est peu pertinent et presque inutile de s'approprier sans réflexion le travail d'un autre puisque de toute façon, la sanction tombera d'elle même lors des évaluations en classe en temps limité.

Un peu de technique

EX. 1 | Réf. 2145

1. Développer $(a+b)^3$ et $3(a+1)^3 - 2\left(3a^2-2\right)$, où $(a,b)\in\mathbb{R}^2$.
2. Montrer que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 3, on a :

$$(n+1)^3 \leq 3n^3$$

3. Montrer que pour tout entier naturel n, on a : $3^n \geq n^3$.

EX. 1 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 2145

1. Développer les deux expressions, et les réduire, en utilisant éventuellement le binôme de Newton.
2. Faire un raisonnement par récurrence.
3. Faire un raisonnement par récurrence.

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

EX. 2 | Réf. 2152

Pour tout entier naturel n, on pose :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{3^k} \qquad \text{et} \qquad T_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{3^k}$$

1. Montrer que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
2. Exprimer S_n en fonction de n, puis déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.
3. En déduire que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par $\dfrac{3}{2}$.
4. Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a : $\quad T_{n+1} = \dfrac{T_n + S_n}{3}$.
5. Montrer par récurrence que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\quad T_n \leq 1$.
6. Montrer que la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
7. En déduire la convergence et la limite de la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

EX. 2 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 2152

1. Revenir à la définition en déterminant le signe de $S_{n+1} - S_n$.
2. Remarquer qu'il s'agit d'une somme du type $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} q^k$, puis prendre la limite dans la formule obtenue.
3. Utiliser l'expressionde S_n pour en déduire un majorant de la suite.
4. Il suffit d'écrire ce qu'est T_{n+1} et de faire un petit changement d'indice.
5. On effectue le raisonnement par récurrence demandé.
6. On détermine le signe de $T_{n+1} - T_n$.
7. Utiliser le théorème de la limite monotone.