Éléments de correction

Les indications qui suivent ne sont là que pour vous aider à démarrer la résolution des situations proposées. Elles sont énoncées en s'appuyant sur les éléments développés en cours. D'autres solutions ou pistes de résolution sont bien évidemment possibles et vous êtes vivement encouragés à les mener jusqu'au bout. Si certains points du devoir restent délicats à mettre en oeuvre, n'hésitez pas à me solliciter, ou même à en discuter avec vos camarades, de tels échanges étant très souvent bénéfiques!

Il est peu pertinent et presque inutile de s'approprier sans réflexion le travail d'un autre puisque de toute façon, la sanction tombera d'elle même lors des évaluations en classe en temps limité.

Un peu de technique

EX. 1 | Réf. 2134

1. Soient $u_1 = (3, 0, -4)$, $u_2 = (3, 1, 1)$ et $u_3 = (-1, 2, -2)$ trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$.
   La famille de vecteurs $\mathcal{F} = (u_1, u_2, u_3)$ de $\mathbb{R}^3$ est-elle une famille libre de $\mathbb{R}^3$?
2. Le vecteur $u = (-2, 3, 1, 1) \in \mathbb{R}^4$ appartient-il à l'espace engendré par les trois vecteurs de $\mathbb{R}^4$ suivants : $v_1 = (1, 1, 1, 1)$, $v_2 = (3, 0, 0, 2)$ et $v_3 = (-1, 1, -1, 1)$?
3. Soient $w_1 = (1, 0, 0)$, $w_2 = (2, 3, 0)$ et $(1, 1, 1)$ trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$.
   La famille de vecteurs $\mathcal{G} = (w_1, w_2, w_3)$ de $\mathbb{R}^3$ est-elle génératrice de $\mathbb{R}^3$?
4. Soient $t_1 = (1, 1, 1, 1)$, $t_2 = (-1, 0, 1, 2)$, $t_3 = (1, 2, 3, 1)$ et $t_4 = (4, 3, 2, -2)$ quatre vecteurs de $\mathbb{R}^4$.
   La famille de vecteurs $\mathcal{H} = (t_1, t_2, t_3, t_4)$ de $\mathbb{R}^4$ est-elle libre ? Trouver le cas échéant une relation de dépendance entre ces quatre vecteurs.

EX. 1 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 2134

- On applique la définition et la méthode classique pour étudier la liberté de la famille ;
- On cherche à exprimer u comme combinaison linéaire de u_1, u_2 et u_3 ;
- On cherche à montrer que tout vecteur x de $\mathbb{R}^3$ s'écrit comme combinaison linéaire de w_1, w_2 et w_3 ;
- On applique la définition et la méthode classique pour étudier la liberté de la famille et on exploite les solutions du système écrit pour en déduire la relation de dépendance demandée.

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

EX. 2 | Réf. 2132

Dans tout ce qui suit, sauf mention contraire, l'espace $\mathcal{E}$ est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O\,;\,\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$, et les coordonnées des points et vecteurs, ou les équations de droites ou de plans seront données dans ce dernier.

1. Déterminer une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}_1$ qui passe par les points $A\,(1, 1, 1)$, $B\,(-1, 2, 3)$ et $C\,(2, -1, 3)$.
2. Le plan $\mathcal{P}_2$ a pour vecteur normal $\overrightarrow{n_2}\begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix}$ et passe par le point $D\,(-1, 0, 1)$. Déterminer une équation cartésienne de $\mathcal{P}_2$.
3. Justifier pourquoi les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont sécants suivant une droite $\mathcal{D}$.
4. Déterminer alors le point $E\,(x_E, 1, z_E)$ de $\mathcal{D}$ et un vecteur directeur $\overrightarrow{u}$ de $\mathcal{D}$.
5. Déduire de la question précédente un système d'équations paramétrique de $\mathcal{D}$.
6. Déterminer la projection orthogonale H du point $F\,(3, 4, 1)$ sur le plan $\mathcal{P}_1$.

EX. 2 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 2132

- $\mathcal{P}_1$ est un plan défini par 3 points, on obtiendra une équation cartésienne à l'aide d'un produit mixte et des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ par exemple ;
- On connaît un vecteur normal de $\mathcal{P}_2$ donc le début d'un équation cartésienne. . .et comme on donne un point, on peut identifier le dernier coefficien ;
- On étudie la position relative de ces deux plans à l'aide de leurs vecteurs normaux ;

- Il s'agit de résoudre un système...
- On exploite les résultats précédents ;
- On utilise la représentation paramétrique de $\mathcal{D}$ et une équation cartésienne de $\mathcal{P}_1$ pour en déduire les coordonnées de F.