Éléments de correction

Les indications qui suivent ne sont là que pour vous aider à démarrer la résolution des situations proposées. Elles sont énoncées en s'appuyant sur les éléments développés en cours. D'autres solutions ou pistes de résolution sont bien évidemment possibles et vous êtes vivement encouragés à les mener jusqu'au bout. Si certains points du devoir restent délicats à mettre en oeuvre, n'hésitez pas à me solliciter, ou même à en discuter avec vos camarades, de tels échanges étant très souvent bénéfiques!

Il est peu pertinent et presque inutile de s'approprier sans réflexion le travail d'un autre puisque de toute façon, la sanction tombera d'elle même lors des évaluations en classe en temps limité.

Un peu de technique

EX. 1 | Réf. 4614

On considère la série numérique $\sum_{n\geq 1} u_n$ où : $u_n = \dfrac{\sin\left(\dfrac{1}{n(n+1)}\right)}{\cos\left(\dfrac{1}{n}\right)\cos\left(\dfrac{1}{n+1}\right)}$.

1. Montrer que $\sum_{n\geq 1} u_n$ est une série numérique convergente.

2. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \tan\left(\dfrac{1}{n}\right) - \tan\left(\dfrac{1}{n+1}\right)$.

3. Déduire de ce qui précède $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$.

EX. 1 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 4614

1. Un équivalent du dénominateur s'obtient par simple passage à la limite, et pour le numérateur, c'est un équivalent usuel. On mobilise alors le théorème d'équivalence pour les séries à termes positifs pour conclure, en ayant au préalable justifié le signe...

2. On mobilisera les formules de trigonométriques, notamment celle donnant $\sin(a+b)$...en remarquant que $\dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$.

3. On en revient à la définition de la somme d'une série numérique : c'est la limite de la suite des sommes partielles.

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

EX. 2 | Réf. 4378

1. Montrer que : $\forall k \in \mathbb{N}^*,\quad \displaystyle\int_0^{\pi} \left(\frac{x^2}{2\pi} - x\right)\cos(kx)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{k^2}$

2. Soit $x \in]0;\pi]$.

a. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\quad \mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,x}\dfrac{1-\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,nx}}{1-\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,x}} = \dfrac{\sin\left(\dfrac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\dfrac{x}{2}\right)}\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,\frac{(n+1)}{2}x}$

b. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\quad \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\cos(kx) = \frac{\sin\left(\dfrac{nx}{2}\right)\cos\left(\dfrac{(n+1)x}{2}\right)}{\sin\left(\dfrac{x}{2}\right)}$

3. Soit g la fonction définie par : $g : \left|\begin{array}{ccc} [0;\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} \dfrac{\dfrac{x^2}{2\pi} - x}{2\sin\left(\dfrac{x}{2}\right)} & \text{si } x \in]0;\pi] \\ -1 & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{array}\right.$

Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0;\pi]$.

4. a. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6} + \int_0^{\pi} g(x) \sin\left(\frac{2n+1}{2} x\right) \mathrm{d}x.$

b. On admet le résultat suivant [a] : Si $\Psi \in \mathcal{C}^1([0;\pi],\mathbb{R})$, alors $\displaystyle\int_0^{\pi} \Psi(x)\sin(\alpha x)\,\mathrm{d}x \underset{\alpha\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$

Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge et que sa somme vaut $\dfrac{\pi^2}{6}$.

a. C'est ce qu'on appelle le lemme de Lebesgues

EX. 2 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 4378

1. On effectue deux intégrations par parties sucessives.

2. a. On pensera à factoriser par l'arc moitié.

b. On remarquera que $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,kx} = \cos(kx) + \mathrm{i}\,\sin(kx)$ et on fera intervenir la somme des termes d'une suite géométrique.

3. Penser au théorème de prolongement $\mathcal{C}^1$ avec peut-être des développements limités...

4. a. Utiliser la question 1...et le fait que $2\sin(a)\cos(b) = \sin(a+b) + \sin(a-b)$.

b. On utilise le résultat admis et la suite des sommes partielles de la série dont on connaît une expression d'après la question précédente.