Éléments de correction

Les indications qui suivent ne sont là que pour vous aider à démarrer la résolution des situations proposées. Elles sont énoncées en s'appuyant sur les éléments développés en cours. D'autres solutions ou pistes de résolution sont bien évidemment possibles et vous êtes vivement encouragés à les mener jusqu'au bout. Si certains points du devoir restent délicats à mettre en oeuvre, n'hésitez pas à me solliciter, ou même à en discuter avec vos camarades, de tels échanges étant très souvent bénéfiques!

Il est peu pertinent et presque inutile de s'approprier sans réflexion le travail d'un autre puisque de toute façon, la sanction tombera d'elle même lors des évaluations en classe en temps limité.

Travailler les fondamentaux

EX. 1 | Réf. 4633

On considère le couple de variables aléatoires (X, Y) dont on donne la loi conjointe dans le tableau ci-contre.

1. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?
2. Soit $U = X \times Y$. Déterminer la loi de U.
3. Soit $V = \min(X, Y)$. Déterminer la loi de V.
4. Déterminer ensuite la loi conjointe du couple (U, V).

$X \backslash Y$	0	1	2	3
1	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$
2	$\frac{1}{10}$	0	0	$\frac{1}{10}$
3	$\frac{1}{10}$	0	$\frac{2}{10}$	0

EX. 1 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 4633

1. Les deux variables aléatoires X et Y sont indépendantes si pour tout $(i, j) \in [\![1; 3]\!] \times [\![0; 3]\!]$, $\mathbb{P}([X = i] \cap [Y = j]) = \mathbb{P}([X = i]) \times \mathbb{P}([Y = j])$. Reste à le vérifier où à trouver un couple (i, j) pour lequel ce n'est pas le cas...
2. On commence par déterminer le support de U, puis les valeurs que doivent prendre X et Y pour que U les atteignent.
3. On commence par déterminer le support de V, puis les valeurs que doivent prendre X et Y pour que U les atteignent.
4. Il s'agit de déterminer toutes les probabilités $\mathbb{P}([U = \ldots] \cap [V = \ldots])$ en remarquant que bon nombre d'entre elles sont nulles, et récapituler l'ensemble dans un tableau.

EX. 2 | Réf. 4632

Une urne contient 2 boules blanches et $n - 2$ boules rouges.
On effectue n tirages sans remise dans cette urne.
On appelle X le rang de sortie de la première boule blanche, et Z le rang de sortie de la deuxième boule blanche.
Pour tout $i \in [\![1; n]\!]$, on désigne par B_i(resp. R_i) l'événement « obtenir une boule blanche (resp. rouge) au i^e tirage ».

1. Déterminer du loi couple (X, Z).
2. En déduire la loi de Z.

EX. 2 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 4632

1. On mobilisera la formule des probabilités composées que l'on explicitera à l'aide des événements B_i et R_i.
2. On utilisera le système complet d'événements trivial associé à la variable aléatoire X pour déterminer la loi de X.

Préparation à l'oral

EX. 3 | Réf. 4634

Soit $c \in]0; 1[$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, et on définit la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $p_n = \dfrac{\alpha c^n}{n!}$.

1. Déterminer la valeur de α pour que la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ puisse définir une probabilité $\mathbb{P}$ sur $\mathbb{N}$ en posant : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(\{n\}) = p_n$.
2. Déterminer alors la probabilité de l'événement $\mathcal{I}$: « être impair ».

EX. 3 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 4634

Mobiliser toutes ses connaissances

EX. 4 | Réf. 4635

On dispose d'une boîte qui contient deux jetons, un noir et un blanc.
On procède à une succession de n tirages dans cette boîte en le remettant entre chaque tirage après en avoir noté la couleur.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on désigne par A_n et D_n les événements suivants :

A_n **:** « on obtient des jetons des deux couleurs au cours des n tirages »

D_n **:** « on obtient au plus un jeton noir »

1. Déterminer $\mathbb{P}(A_n)$ et $\mathbb{P}(D_n)$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$.

2. Dans le cas où $n = 2$, les deux événements A_n et D_n sont-ils indépendants ?

3. Même question dans le cas où $n = 3$.

EX. 4 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 4635

1. On s'intéressera plutôt à $\mathbb{P}\left(\overline{A_n}\right)$, car l'événement $\overline{A_n}$ est bien plus simple à décrire. Pour D_n, on traduira sous forme d'une union disjointe la notion de « au plus un jeton noir ».

2. On vérifiera si $\mathbb{P}(A_2 \cap D_2) = \mathbb{P}(A_2) \times \mathbb{P}(D_2)$.

3. On vérifiera si $\mathbb{P}(A_3 \cap D_3) = \mathbb{P}(A_3) \times \mathbb{P}(D_3)$.

Pour s'occuper les jours de pluies

EX. 5 | Réf. 1400

Soit n un entier naturel non nul.
Une urne contient $2n$ boules indiscernables au toucher : deux boules portant le numéro 1, deux boules portant le numéro 2, ..., deux boules portant le numéro n.
On effectue une succession de tirages de deux boules de cette urne selon le protocole suivant :

- si les deux boules obtenues portent le même numéro, elles sont définitivement éliminées ;
- si les deux boules portent des numéros différents, elles sont remises dans l'urne avant le tirage suivant.

On note X_n la variable aléatoire égale au nombre nécesaires pour vider complètement l'urne.
On note Y_1 la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour obtenir une première paire de boules portant le même numéro et pour tout $i \in [\![2; n]\!]$, on note Y_i la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour obtenir une i^{e} paire de boules portant le même numéro, à partir d'une $(i-1)^{e}$ paire de boules.

1. **a.** Quelle relation lie X_n à Y_1, Y_2, ..., Y_n ?

b. Déterminer la loi de Y_1.
Plus généralement, déterminer pour $i \in [\![1; n]\!]$ la loi de Y_i. Quelle est son espérance.

c. En déduire que $\mathbb{E}(X_n) = n^2$.

2. **a.** Dans le cas $n = 1$, puis $n = 2$, déterminer la loi de X_n.

b. On suppose $n = 3$. Montrer que :

$$\forall k \geq 3, \quad \mathbb{P}([X_3 = k]) = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{4}{5}\right)^{k-2} - \left(\frac{2}{3}\right)^{k-2}\right)$$

3. On revient au cas général.

a. Montrer que $\mathbb{P}([X_n = n]) = \dfrac{2^n n!}{(2n)!}$.

b. Exprimer $\mathbb{P}([X_n = n+1])$ à l'aide de termes de la suite $(h_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ définie pour tout entier k non nul par $h_k = \displaystyle\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{i}$.

EX. 5 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 1400

1. **a.** C'est immédiat que X_n est la somme des Y_i.
   b. Les variables Y_i suivent des lois géométriques qu'il s'agit de justifier.
   c. On utilisera la linéarité de l'espérance.
2. **a.** X_1 est clairement constante égale à 1, et pour X_2 on reconnaîtra une loi géométrique.
   b. On remarquera que $X_3 = Y_1 + Y_2 + 1$.
3. **a.** Décomposer $[X_n = n]$ à l'aide de $[Y_i = 1]$.
   b. On décomposera sous forme d'une réunion disjointe $[X_n = n + 1]$ à l'aide de $[Y_i = 2]$ et $[Y_j = 1]$.