À noter & À garder en tête

Les indications qui suivent ne sont là que pour vous aider à démarrer la résolution des situations proposées. Elles sont énoncées en s'appuyant sur les éléments développés en cours. D'autres solutions ou pistes de résolution sont bien évidemment possibles et vous êtes vivement encouragés à les mener jusqu'au bout.
Si certains points du devoir restent délicats à mettre en oeuvre, n'hésitez pas à me solliciter, ou même à en discuter avec vos camarades, de tels échanges étant très souvent bénéfiques!

Il est peu pertinent et presque inutile de s'approprier sans réflexion le travail d'un autre puisque de toute façon, la sanction tombera d'elle même lors des évaluations en classe en temps limité.

Un peu de technique

Exercice| [5004] | 1| Inégalité de Cauchy-Schwarz

Soit $n \in \mathbb{N}$.
On considère $a_1, a_2, \ldots, a_n$ et $b_1, b_2, \ldots, b_n$ des réels.

(1). On définit la fonction p par : $p : \begin{array}{|ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} (a_i x + b_i)^2 \end{array}$.

Justifier que p est une fonction polynôme de degré 2.

(2). Déterminer de discriminant Δ de p.

(3). En remarquant et en justifiant que p est une fonction positive, montrer que :

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)$$

Pistes de réflexion

(1). On se contentera de développer le terme général de cette somme, puis d'utiliser les opérations sur les sommes pour obtenir l'expression d'une fonction polynôme de degré 2.

(2). Après avoir identifié les coefficients de ce polynôme de degré 2, on mettra en forme la formule du discriminant pour obtenir l'expression de ce dernier en fonction de plusieurs sommes que l'on simplifiera *a minima*.

(3). Une somme de quantités positives est clairement positive et une fonction polynôme qui est toujours positive, a un discriminant qui est ...

Exercice| [5005] | 2| Histoire de téléscopage | Transformation d'Abel

(1). On considère deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de nombres réels. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=0}^{n} a_k (b_{k+1} - b_k) = a_n b_{n+1} - a_0 b_0 + \sum_{k=1}^{n} (a_{k-1} - a_k) b_k$$

(2). Justifier que : $\forall k \in \mathbb{N}, 2^k = 2^{k+1} - 2^k$

puis montrer que : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k 2^k = 2^{n+1}(n-1) + 2$

Pistes de réflexion

(1). On commencera par développer le terme général de la somme, avant de procéder des regroupements pour ensuite utiliser les propriétés opératoires sur les sommes, et on terminera par un changement d'indice dans une des sommes obtenues avant de procéder ùn regroupement de termes.

(2). On appliquera le résultat de la question précédente à l'aide de la transformation d'écriture proposée pour 2^k.

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

Exercice| [5003] | 3| Déclinaison autour du binôme de Newton

Dans tout cet exercice x désigne un réel strictement positif et n un entier naturel supérieur ou égal à 1.

On pose alors : $S = \sum_{k=0}^{n} \binom{2n}{2k} x^k$ et $T = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n}{2k+1} x^k$.

(1). Soit $t \in \mathbb{R}$. Exprimer en fonction de t et de n, les deux sommes $U = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} t^k$ et $V = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} (-t)^k$.

(2). En prenant $t = \sqrt{x}$, vérifier que l'on a les relations $\begin{cases} S + tT = U \\ S - tT = V \end{cases}$.

(3). Exprimer alors $U + V$ et $U - V$ en fonction de S, T et t avec $t = \sqrt{x}$.

(4). En déduire alors les expressions de S et T en fonction de x et de n.

Pistes de réflexion

(1). On mobilisera la formule du binôme de Newton en remarquant que $1^{2n-k} = 1$.

(2). On suivra l'indication en explicitation de U et de V en remarquant en particulier que dans l'expression de S, intervient les coefficients binomiaux de la forme $\binom{2n}{\text{entier pair}}$ et dans T ceux de la forme $\binom{2n}{\text{entier impair}}$ ce qui permettra de « scinder » en deux les sommes définissant U et V.

(3). On se contente de calculer $U \pm V$ à partir des relations de la question précédente.

(4). De la question précédente, on obtient une expression de S en fonction de U et V, dont on connaît l'expression en fonction de n et de t. Et on procède de même pour T.