Éléments de réflexion | Pistes de recherche

Les éléments développés ci-après ne sont souvent que des indications pour aboutir à la solution, qui détaillent la plupart du temps un cheminement à suivre pour montrer le rèsultat demandé. La plupart des calculs sont laissés aux lecteurs. . .La mise en forme de certains calculs est faite de sorte à économiser de l'espace et donc du papier, mais il conviendrait de ne pas les écrire en ligne notamment comme cela l'est parfois.

Un peu de technique

EX. 1 | Réf. 2396

Soit $\mathcal{F} = (u_1, u_2, u_3)$ la famille de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ où : $u_1 = (1, a, 3)$, $u_2 = (1, 1, a)$, et $u_3 = (a, 1, 3)$ où a étant un réel quelconque.

Étudier, suivant les valeurs du réel a, la liberté de la famille $\mathcal{F}$ et préciser, chaque fois qu'elle est liée, une relation de dépendance entre les vecteurs de la famille.

EX. 1 | Éléments de correction | Réf. 2396

Puisque $\mathcal{F}$ est une famille de $\boxed{3}$ vecteurs de $\mathbb{R}^3$, la famille $\mathcal{F}$ sera libre si, et seulement si, le système homogène de matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ a & 1 & 1 \\ 3 & a & 3 \end{pmatrix}$ est de rang $\boxed{3}$. On procède alors à l'échelonnement de la matrice A pour en détérminer les pivots et le rang, étant inutile d'écrire le second membre puisque ce dernier est nul pour chacune des équations.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ a & 1 & 1 \\ 3 & a & 3 \end{pmatrix} \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - aL_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1}}{\sim_L} \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & 1-a & 1-a^2 \\ 0 & a-3 & 3-3a \end{pmatrix}$$

On a ainsi deux cas :

Si $a \neq 1$: on peut poursuivre l'échelonnement :

$$A \underset{L_3 \leftarrow L_3 - \frac{a-3}{1-a} L_2}{\sim_L} \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & 1-a & 1-a^2 \\ 0 & 0 & -a^2-a+6 \end{pmatrix}$$

Dans ce cas, les deux premiers pivots 1 et $1 - a$ sont clairement non nuls.
Le troisième pivot s'annule pour $a = 2$ ou $a = -3$.
On en déduit donc que si $a \notin \{-3, 1, 2\}$, la matrice A est de rang 3, et par suite la famille $\mathcal{F}$ est libre.

Si $a = 1$: la matrice A est dans ce cas :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix} \sim_L \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 - 0 & \end{pmatrix} \underset{L_3 \leftrightarrow L_2}{\sim_L} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

elle ne possède donc que 2 pivots, et est donc de rang 2. La famille $\mathcal{F}$ est dans ce cas liée.

Il reste à chercher les relations de dépendances entre les vecteurs de la famille $\mathcal{F}$ pour les cas où $a = 1$, $a = 2$ et $a = 3$.
Pour trouver de telles relations, il s'agit donc de déterminer, dans chacun des cas, trois réels α, β γ tels que $\alpha u_1 + \beta u_2 + \gamma u_3 = \overrightarrow{0}$. Cette relation se traduit par la résolution du système homogène de matrice A, dont les échelonnements précédents donnent :

Si $a = 1$: on obtient que $A \underset{L_2 \leftarrow -\frac{1}{2} L_2}{\sim_L} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{L_1 \leftarrow L_1 - L_2}{\sim_L} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ce qui donne les relations $\left\{ \begin{array}{l} \alpha = -\gamma \\ \beta = 0 \end{array} \right.$. Il vient donc que $u_1 = u_3$, ce que l'on voyait en fait directement.

Si $a = 2$: on obtient que $A \underset{L_1 \leftarrow L_1 + L_2}{\sim_L} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ce qui permet d'obtenir les relations $\left\{ \begin{array}{l} \alpha = \gamma \\ \beta = -3\gamma \end{array} \right.$.

Par suite on en déduit que $u_1 - 3u_2 + u_3 = \overrightarrow{0}$.

Si $a=-3$ **:** on obtient que $A \underset{L_2 \frac{1}{2} L_2}{\sim_L} \begin{pmatrix}1&1&-3\\0&1&-2\\0&0&0\end{pmatrix} \underset{L_1 \leftarrow L_1 - L_2}{\sim_L} \begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&-2\\0&0&0\end{pmatrix}$ ce qui permet d'écrire les relations $\begin{cases}\alpha=\gamma\\ \beta=2\gamma\end{cases}$.

Par suite, on en déduit que $u_1+2u_2+u_3=\overrightarrow{0}$.

EX. 2 | Réf. 2397

On considère la famille $\mathcal{F}=(e_1,\,\ldots,\,e_4)$ de vecteurs de $\mathbb{R}^4$ où :

$$e_1=(1,1,1,1),\quad e_2=(0,1,2,1),\quad e_3=(1,0,-2,3) \text{ et } e_4=(1,1,2,-2).$$

1. La famille $\mathcal{F}$ est-elle libre ? Est-elle génératrice de $\mathbb{R}^4$?
2. Déterminer une relation entre les nombres réels α et β pour que le vecteur $u=(1,1,\alpha,\beta)$ appartienne à $\mathrm{Vect}\,(\mathcal{F})$.

EX. 2 | Éléments de correction | Réf. 2397

1. La famille $\mathcal{F}$ est libre (resp. génératrice) si, et seulement si, le rang du système homogène de matrice la matrice de la famille de vecteurs est de rang 4 (resp. 4) puisque possèdant 4 vecteurs (resp. puisqu'étant une famille de $\mathbb{R}^4$).

   La matrice associée à cette famille de vecteurs est la matrice $A=\begin{pmatrix}1&0&1&1\\1&1&0&1\\1&2&-2&2\\1&1&3&-2\end{pmatrix}$ dont un échelonnement en lignes donne que :

$$\begin{pmatrix}1&0&1&1\\1&1&0&1\\1&2&-2&2\\1&1&3&-2\end{pmatrix} \underset{\substack{L_2\leftarrow L_2-1L_1\\L_3\leftarrow L_3-1L_1\\L_4\leftarrow L_4-1L_1}}{\sim_L} \begin{pmatrix}1&0&1&1\\0&1&-1&0\\0&2&-3&1\\0&1&2&-3\end{pmatrix} \underset{\substack{L_3\leftarrow L_3-2L_2\\L_4\leftarrow L_4-1L_2}}{\sim_L}$$
$$\begin{pmatrix}1&0&1&1\\0&1&-1&0\\0&0&-1&1\\0&0&3&-3\end{pmatrix} \underset{L_4\leftarrow L_4+3L_3}{\sim_L} \begin{pmatrix}1&0&1&1\\0&1&-1&0\\0&0&-1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

   Il y a 3 pivots non nuls, ainsi, la famille $\mathcal{F}$ n'est pas libre ni génératrice.

2. On cherche donc à déterminer une condition sur $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$ pour qu'il existe $(\lambda_1,\,\ldots,\,\lambda_4)$ tels que $u=\lambda_1e_1+\lambda_2e_2+\lambda_3e_3+\lambda_4e_4$.

   Il s'agit donc de savoir si le système de matrice A et de second membre la matrice colonne formée par les coordonnées de u est compatible. En reprenant l'échelonnement de la matrice A sur la matrice augmentée de ce nouveau système, on obtient :

$$\left(\begin{array}{cccc|c}1&0&1&1&1\\1&1&0&1&1\\1&2&-2&2&\alpha\\1&1&3&-2&\beta\end{array}\right) \underset{\substack{L_2\leftarrow L_2-1L_1\\L_3\leftarrow L_3-1L_1\\L_4\leftarrow L_4-1L_1}}{\sim_L} \left(\begin{array}{cccc|c}1&0&1&1&1\\0&1&-1&0&0\\0&2&-3&1&\alpha-1\\0&1&2&-3&\beta-1\end{array}\right)$$
$$\underset{\substack{L_3\leftarrow L_3-2L_2\\L_4\leftarrow L_4-1L_2}}{\sim_L} \left(\begin{array}{cccc|c}1&0&1&1&1\\0&1&-1&0&0\\0&0&-1&1&\alpha-1\\0&0&3&-3&\beta-1\end{array}\right)$$
$$\underset{L_4\leftarrow L_4+3L_3}{\sim_L} \left(\begin{array}{cccc|c}1&0&1&1&1\\0&1&-1&0&0\\0&0&-1&1&\alpha-1\\0&0&0&0&\beta+3\alpha-4\end{array}\right)$$

   Ce système présente alors une équation de compatibilité qui est $\beta+3\alpha-4=0$ qui est donc la condition nécessaire et suffisante recherchée.

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

EX. 3 | Réf. 3219

On se propose dans cet exercice d'écrire plusieurs fonctions en `Python` permettant de vérifier si trois vecteurs de l'espace forment une base orthonormée directe de l'espace, sans utiliser les fonctions existantes des modules `scipy` ou `numpy` de `Python`.

Pour cela, on supposera qu'un vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ sera représenté par la liste `[x,y,z]`.

1. Écrire une fonction `prodscal(u,v)` en `Python` qui répond aux spécifications suivantes :

Nom de la fonction :	`prodscal`
Paramètre(s) :	`u` liste de 3 nombres et `v` liste de trois nombres
Valeur renvoyée :	la valeur du produit scalaire $\vec{u}\,.\,\vec{v}$ où $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont représentés par les listes `u` et `v`

2. Écrire une fonction `prodvect(u,v)` en `Python` qui répond aux spécifications suivantes :

Nom de la fonction :	`prodvect`
Paramètre(s) :	`u` liste de 3 nombres et `v` liste de trois nombres
Valeur renvoyée :	une liste de trois nombres donnant les coordonnées du produit vectoriel $\vec{u} \wedge \vec{v}$ où $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont représentés par les listes `u` et `v`

3. À l'aide des deux fonctions précédemment écrites, écrire une fonction `base(u,v,w)` en `Python` qui répond aux spécifications suivantes :

Nom de la fonction :	`base`
Paramètre(s) :	`u` liste de 3 nombres, `v` liste de 3 nombres et `w` liste de 3 nombres
Valeur renvoyée :	`True` si la famille formée par les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ représentés par les listes `u`, `v` et `w` est une base de vecteurs de l'espace, et `False` sinon.

4. À l'aide de la fonction `prodscal` et de la fonction `base`, écrire une fonction `baseortho(u,v,w)` en `Python` qui répond aux spécifications suivantes :

Nom de la fonction :	`baseortho`
Paramètre(s) :	`u` liste de 3 nombres, `v` liste de 3 nombres et `w` liste de 3 nombres
Valeur renvoyée :	`True` si la famille formée par les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ représentés par les listes `u`, `v` et `w` est une base orthonormée de vecteurs de l'espace, et `False` sinon.

EX. 3 | Éléments de correction | Réf. 3219

1. On peut proposer :

```
def prodscal(u,v):
    """ calcule le produit scalaire des deux vecteurs u et v
    repr\'esent\'e par les deux listes de trois nombres u et v donn\'ees en param\`etres

    u,v: liste de trois nombres """

    return u[0]*v[0]+u[1]*v[1]+u[2]*v[2]
```

2. On peut proposer :

```python
def prodvect(u,v):
    """ calcule le vectoriel des deux vecteurs u et v
    repr\'esent\'e par les deux listes de trois nombres u et v donn\'ees en param\`etres
    en renvoyant le r\'esultat sous forme d'une liste de 3 nombres correspondant
    aux coordonn\'ees du produit vectoriel demand\'e

    u,v: liste de trois nombres """

    return [u[1]*v[2]-u[2]*v[1],-(u[0]*v[2]-u[2]*v[0]),u[0]*v[1]-u[1]*v[0]]
```

3. Il suffit de faire calculer $\left[\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w}\right]$ et de comparer sa valeur à 0, avec tous les problèmes informatiques sous-jacents à la comparaison à zéro pour des flottants. On peut toutefois proposer :

```python
def base(u,v,w):
    """ v\'erifie sur les trois vecteurs u, v, w repr\'esent\'es par les trois listes
    de nombres u, v, w pass\'es en param\`etres, forment une base de vecteurs du plan
    en calculant leur produit mixte, renvoyant TRUE si c'est le cas, et FALSE sinon
    u,v: liste de trois nombres """

    return(prodscal(prodvect(u,v),w)!=0)
```

4. On vérifie au préalable si les trois vecteurs forment une base à l'aide de la fonction `base`, puis on s'assure de leur orthogonalité deux à deux et on vérifie si chaque vecteur est de norme 1. On peut ainsi proposer :

```python
def baseortho(u,v,w):
    """ v\'erifie sur les trois vecteurs u, v, w repr\'esent\'es par les trois listes
    de nombres u, v, w pass\'es en param\`etres, forment une base de vecteurs
    orthonorm\'e du plan renvoyant TRUE si c'est le cas, et FALSE sinon
    u,v: liste de trois nombres """

    if base(u,v,w)==True:
        if prodscal(u,v)!=0 or prodscal(u,w)!=0 or prodscal(v,w)!=0:
            return False
        else:
            if prodscal(u,u)!=1 or prodscal(v,v)!=1 or prodscal(w,w)!=1:
                return False
            else:
                return True
    else:
        return False
```