Éléments de réflexion | Pistes de recherche

Les éléments développés ci-après ne sont souvent que des indications pour aboutir à la solution, qui détaillent la plupart du temps un cheminement à suivre pour montrer le rèsultat demandé. La plupart des calculs sont laissés aux lecteurs. . .La mise en forme de certains calculs est faite de sorte à économiser de l'espace et donc du papier, mais il conviendrait de ne pas les écrire en ligne notamment comme cela l'est parfois.

Un peu de technique

EX. 1 | Réf. 2145

1. Développer $(a+b)^3$ et $3(a+1)^3 - 2\left(3a^2-2\right)$, où $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.
2. Montrer que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 3, on a :
$$(n+1)^3 \leq 3n^3$$
3. Montrer que pour tout entier naturel n, on a : $3^n \geq n^3$.

EX. 1 | Éléments de correction | Réf. 2145

1. On obtient : $(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ et $3(a+1)^3 - 2\left(3a^2-2\right) = 3a^3+3a^2+9a+7$.
2. Pour n entier avec $n \geq 3$, on pose $\mathcal{P}(n)$: « $(n+1)^3 \leq 3n^3$ ».
Montrons par récurrence sur l'entier n, que la propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \geq 3$.
   - **Initialisation :** vérifions que la propriété $\mathcal{P}(3)$ est vraie, c'est à dire que $(3+1)^3 \leq 3 \times 3^3$.
   On a : $(3+1)^3 = 4^3 = 64$ et $3 \times 3^3 = 3 \times 27 = 71$. Par suite, on a bien $(3+1)^3 \leq 3 \times 3^3$, et on en conclut que la propriété $\mathcal{P}(3)$ est vraie.
   - **Hérédité :** supposons que pour un entier $n \geq 3$, on ait la propriété $\mathcal{P}(n)$, à savoir $(n+1)^3 \leq 3n^3$, et montrons que l'on a alors la propriété $\mathcal{P}(n+1)$ à savoir $((n+1)+1)^3 \leq 3(n+1)^3$ c'est à dire $(n+2)^3 \leq 3(n+1)^3$.
   Il s'agit donc, à partir de la relation $(n+1)^3 \leq 3n^3$, d'obtenir la relation $(n+2)^3 \leq 3(n+1)^3$, et donc dans un premier temps, de trouver une relation entre $(n+1)^3$ et $(n+2)^3$.
   On a clairement : $$\begin{aligned}(n+2)^3 &= ((n+1)+1)^3 \\ &= (n+1)^3+3(n+1)^2+3(n+1)+1 \\ &= \underbrace{(n+1)^3}_{\leq 3n^3}+\left(3n^2+9n+7\right)\end{aligned}.$$
   Ainsi, en utilisant l'hypothèse de récurrence, on en déduit l'inégalité suivante : $(n+1)^3 \leq 3n^3+3n^2+9n+1$.
   Or d'après la **question (1).**, on a $3n^3+3n^2+9n+1 = 3(n+1)^3 - \underbrace{2\left(3n^2-2\right)}_{>0 \text{ si } n\geq 1}$ et comme $2\left(3n^2-2\right) > 0$ si $n \geq 1$, on en déduit que $3n^3+3n^2+9n+1 \leq 3(n+1)^3$.
   On en déduit ainsi que $(n+2)^3 \leq 3(n+1)^3$, ce qui est bien la propriété $\mathcal{P}(n)$.
   - **Conclusion :** la propriété $\mathcal{P}(n)$ étant vraie au rang $n=3$ et héréditaire, cette dernière est vraie pour tout entier $n \geq 3$.

   Par suite, on en déduit que, pour tout n entier tel que $n \geq 3$, on a : $(n+1)^3 \leq 3n^3$.
3. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $\mathcal{P}(n)$:« $3^n \geq n^3$ ».
Montrons par récurrence sur l'entier n, que la propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier n.
   - **Initialisation :** vérifions que la propriété $\mathcal{P}(0)$ est vraie, c'est à dire que l'on a bien $3^0 \geq 0^3$.
   Il est clair que $3^0 = 1$ et $0^3 = 0$, donc $3^0 \geq 0^3$, ce qui est la propriété $\mathcal{P}(0)$.
   - **Hérédité :** supposons que pour un entier n on ait la propriété $\mathbb{P}(n)$, c'est à dire $3^n \geq n^3$, et montrons que l'on a alors la propriété $\mathcal{P}(n+1)$ à savoir $3^{n+1} \geq (n+1)^3$.
   Il s'agit donc, à partir de la relation $3^n \geq n^3$ d'en déduire la relation $3^{n+1} \geq (n+1)^3$, en trouvant en particulier une relation entre 3^n et 3^{n+1}.
   On a clairement : $3^{n+1} = 3 \times \underbrace{3^n}_{\geq n^3}$ et donc en utilisant l'hypothèse de récurrence, on en déduit que : $3^{n+1} \geq 3 \times n^3$. Or d'après la **question (2).**, on a $3n^3 \geq (n+1)^3$, et ainsi, on en déduit que $3^{n+1} \geq (n+1)^3$, ce qui est bien $\mathcal{P}(n+1)$.
   - **Conclusion :** la propriété $\mathcal{P}(n)$ étant vraie au rang $n=0$ et héréditaire, elle est donc vraie pour tout entier n.

   Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $3^n \geq n^3$.

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

BY NC ND

EX. 2 | Réf. 2152

Pour tout entier naturel n, on pose :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{3^k} \qquad \text{et} \qquad T_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{3^k}$$

1. Montrer que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

2. Exprimer S_n en fonction de n, puis déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.

3. En déduire que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par $\frac{3}{2}$.

4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $T_{n+1} = \frac{T_n + S_n}{3}$.

5. Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $T_n \leq 1$.

6. Montrer que la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

7. En déduire la convergence et la limite de la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

EX. 2 | Éléments de correction | Réf. 2152

1. On étudie le signe de $S_{n+1} - S_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_{n+1} - S_n = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{3^k} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{3^k} = \frac{1}{3^{n+1}} \geq 0$.

Par conséquent, la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est clairement croissante.

2. On a directement que $S_n = \dfrac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{3}{2}\left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right)$.

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} = 0$ puisque $-1 < \frac{1}{3} < 1$, donc $S_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{3}{2}$.

3. La suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc croissante. Si elle n'était pas majorée, elle ne pourrait pas converger. Or on vient de voir que $S_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{3}{2}$, donc elle est majorée, et elle l'est notamment par la valeur de sa limite, ici $\frac{3}{2}$.

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} T_{n+1} &= \sum_{k=0}^{n+1} \frac{k}{3^k} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{3^k} \\ &\underset{\substack{\text{changement d'indice} \\ k=j+1}}{=} \sum_{j=0}^{n} \frac{j+1}{3^{j+1}} \\ &= \frac{1}{3}\sum_{j=0}^{n} \frac{j}{3^j} + \frac{1}{3}\sum_{j=0}^{n} \frac{1}{3^j} \\ &= \frac{1}{3}T_n + \frac{1}{3}S_n \end{aligned}$$

5. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $\mathcal{P}(n)$: « $T_n \leq 1$ ».

Montrons par récurrence sur n, que la propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier n.

- **Initialisation :** vérifions que la propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie au rang $n = 0$, c'est à dire que $T_0 = \sum_{k=0}^{0} \frac{k}{3^k} \leq 1$.

  On a : $T_0 = \sum_{k=0}^{0} \frac{k}{3^k} = 0$ et $0 \leq 1$, donc on a clairement $T_0 \leq 1$, et par suite, la propriété $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

- **Hérédité :** supposons que pour $n \in \mathbb{N}$, on ait $\mathcal{P}(n)$, c'est à dire $T_n \leq 1$, et montrons alors que l'on a $\mathcal{P}(n+1)$ c'est à dire $T_{n+1} \leq 1$.

  On a dans un premier temps que : $T_{n+1} = \frac{1}{3}T_n + \frac{1}{3}S_n$.

  Comme $S_n \leq \frac{3}{2}$, on a $\frac{1}{3}S_n \leq \frac{1}{2}$. Puisque par hypothèse de récurrence, $T_n \leq 1$, on a $\frac{1}{3}T_n \leq \frac{1}{3}$, et ainsi

$\frac{1}{3}T_n + \frac{1}{3}S_n \leq \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \leq 1$, et on a ainsi $\mathcal{P}(n+1)$.

- **Conclusion :** la propriété $\mathcal{P}(n)$ étant vraie au rang $n = 0$ et héréditaire, elle est donc vraie pour tout entier n.

6. On étudie le signe de $T_{n+1} - T_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad T_{n+1} - T_n = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{k}{3^k} - \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{3^k} = \frac{n+1}{3^{n+1}} \geq 0.$

Par conséquent, la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est clairement croissante.

7. La suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant croissante majorée, elle converge vers un réel ℓ.

Compte-tenu de la relation $T_{n+1} = \frac{T_n + S_n}{3}$, cette dernière vérifie ainsi la relation $\ell = \frac{\ell + \frac{3}{2}}{3}$ qui conduit après résolution à $\ell = \frac{3}{4}$.