Éléments de réflexion | Pistes de recherche

Les éléments développés ci-après ne sont souvent que des indications pour aboutir à la solution, qui détaillent la plupart du temps un cheminement à suivre pour montrer le rèsultat demandé. La plupart des calculs sont laissés aux lecteurs...La mise en forme de certains calculs est faite de sorte à économiser de l'espace et donc du papier, mais il conviendrait de ne pas les écrire en ligne notamment comme cela l'est parfois.

Un peu de technique

EX. 1 | Réf. 2134

1. Soient $u_1 = (3, 0, -4)$, $u_2 = (3, 1, 1)$ et $u_3 = (-1, 2, -2)$ trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$.
   La famille de vecteurs $\mathcal{F} = (u_1, u_2, u_3)$ de $\mathbb{R}^3$ est-elle une famille libre de $\mathbb{R}^3$?
2. Le vecteur $u = (-2, 3, 1, 1) \in \mathbb{R}^4$ appartient-il à l'espace engendré par les trois vecteurs de $\mathbb{R}^4$ suivants : $v_1 = (1, 1, 1, 1)$, $v_2 = (3, 0, 0, 2)$ et $v_3 = (-1, 1, -1, 1)$?
3. Soient $w_1 = (1, 0, 0)$, $w_2 = (2, 3, 0)$ et $(1, 1, 1)$ trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$.
   La famille de vecteurs $\mathcal{G} = (w_1, w_2, w_3)$ de $\mathbb{R}^3$ est-elle génératrice de $\mathbb{R}^3$?
4. Soient $t_1 = (1, 1, 1, 1)$, $t_2 = (-1, 0, 1, 2)$, $t_3 = (1, 2, 3, 1)$ et $t_4 = (4, 3, 2, -2)$ quatre vecteurs de $\mathbb{R}^4$.
   La famille de vecteurs $\mathcal{H} = (t_1, t_2, t_3, t_4)$ de $\mathbb{R}^4$ est-elle libre ? Trouver le cas échéant une relation de dépendance entre ces quatre vecteurs.

EX. 1 | Éléments de correction | Réf. 2134

1. Il s'agit de montrer que, si λ_1, λ_2 et λ_3 sont trois réels tels que $(\star)$: $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 = \overrightarrow{0}$ où $\overrightarrow{0} = (0, 0, 0)$, alors $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

   La relation $(\star)$ se traduit par le système $\mathbb{S}$: $\left\{\begin{array}{l} 3\lambda_1 + 3\lambda_2 - \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \\ -4\lambda_1 + \lambda_2 - 2\lambda_3 = 0 \end{array}\right.$.

   $$\mathcal{S} \underset{L_3 \leftarrow 3L_3 + 4L_1}{\Leftrightarrow} \left\{\begin{array}{l} 3\lambda_1 + 3\lambda_2 - \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \\ 15\lambda_2 - 10\lambda_3 = 0 \end{array}\right. \underset{L_3 \leftarrow L_3 - 15L_2}{\Leftrightarrow} \left\{\begin{array}{l} 3\lambda_1 + 3\lambda_2 - \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \\ -40\lambda_3 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$$

   Par conséquent, la famille $\mathcal{F}$ est une famille libre de $\mathbb{R}^3$.
2. Il s'agit donc de montrer qu'il existe trois réels α, β, γ tels que $(\diamond)$: $u = \alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3$.

   La relation $(\diamond)$ se traduit par le système suivant : $\mathcal{S}'$: $\left\{\begin{array}{l} \alpha + 3\beta - \gamma = -2 \\ \alpha + \gamma = 3 \\ \alpha - \gamma = 1 \\ \alpha + 2\beta + \gamma = 1 \end{array}\right.$.

   $$\mathcal{S}' \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_1}}{\Leftrightarrow} \left\{\begin{array}{l} \alpha + 3\beta - \gamma = -2 \\ -3\beta + 2\gamma = 5 \\ -3\beta + 3\gamma = 0 \\ -\beta + 2\gamma = 3 \end{array}\right. \underset{\substack{L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \\ L_4 \leftarrow 3L_4 - L_2}}{\Leftrightarrow} \left\{\begin{array}{l} \alpha + 3\beta - \gamma = -2 \\ -3\beta + 2\gamma = 5 \\ -2\gamma = -2 \\ 4\gamma = 4 \end{array}\right. \underset{L_4 \leftarrow 2L_4 + 4L_2}{\Leftrightarrow} \left\{\begin{array}{l} \alpha + 3\beta - \gamma = -2 \\ -3\beta + 2\gamma = 5 \\ -2\gamma = -2 \\ 0 = 0 \end{array}\right.$$

   La dernière équation, dite de compatibilité est clairement vérifiée, donc ce système admet une solution. On en déduit notamment que $\gamma = 1$, puis que $\beta = -1$ et finalement que $\alpha = 2$.
   Par suite, cela signifie que $u = 2v_1 - v_2 + v_3$. Par conséquent, u s'exprime comme combinaison linéaire des trois vecteurs v_1, v_2 et v_3 de $\mathbb{R}^4$ et donc appartient à l'espace engendré par ces trois vecteurs.
3. La famille $\mathcal{G}$ sera génératrice de $\mathbb{R}^3$ si le système dont la matrice est formée, en colonne, des coordonnées des vecteurs w_1, w_2, w_3 est de rang 3. Or la matrice de ce système est clairement $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ qui conduit donc à un système de rang clairement 3 puisque les 3 pivots sont non nuls. Ainsi, la famille $\mathcal{G}$ est bien génératrice de $\mathbb{R}^3$.
4. Il s'agit de montrer que, si λ_1, λ_2, λ_3 et λ_4 sont quatre réels tels que $(\heartsuit)$: $\lambda_1 t_1 + \lambda_2 t_2 + \lambda_3 t_3 + \lambda_4 t_4 = \overrightarrow{0}$ où $\overrightarrow{0} = (0, 0, 0, 0)$, alors $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$.

La relation (♡) se traduit par le système homogène dont la matrice associée est $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$, où il suffit d'en obtenir une forme échelonnée pour déterminer son rang, ce qui nous assurera de la liberté de la famille si ce dernier est 4.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - L1}}{\sim_L} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & -2 \\ 0 & 3 & 0 & -6 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\substack{L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 3L_2}}{\sim_L} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -3 \end{pmatrix} \underset{L_3 \leftrightarrow L_4}{\sim_L} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et ainsi, le système est de rang 3 puisque seul 3 des quatre pivots sont non nuls. La famille $\mathcal{H}$ n'est donc pas libre. Si on poursuit l'échelonnement de la matrice de ce système homogène, il vient :

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{L_3 \leftarrow -\frac{1}{3} L_3}{\sim_L} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_3 \\ L_1 \leftarrow L_1 - L_3}}{\sim_L} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{L_1 \leftarrow L_1 + L_2}{\sim_L} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Cette matrice échelonnée réduite donne donc : $\begin{cases} \lambda_1 = -\lambda_4 \\ \lambda_2 = 2\lambda_4 \\ \lambda_3 = -\lambda_4 \end{cases}$ en choisissant λ_4 comme paramètre dans ce système.

Ainsi, on a la relation : $-\lambda_4 t_1 + 2\lambda_4 t_2 - \lambda_4 t_3 + \lambda_4 t_4 = \overrightarrow{0}$, on encore pour $\lambda_4 = 1$: $-t_1 + 2t_2 - t_3 + t_4 = 0$ qui est ainsi la relation de dépendance recherchée.

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

EX. 2 | Réf. 2132

Dans tout ce qui suit, sauf mention contraire, l'espace $\mathcal{E}$ est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O\,;\ \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$, et les coordonnées des points et vecteurs, ou les équations de droites ou de plans seront données dans ce dernier.

1. Déterminer une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}_1$ qui passe par les points $A\,(1,1,1)$, $B\,(-1,2,3)$ et $C\,(2,-1,3)$.
2. Le plan $\mathcal{P}_2$ a pour vecteur normal $\overrightarrow{n_2}\begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix}$ et passe par le point $D\,(-1,0,1)$. Déterminer une équation cartésienne de $\mathcal{P}_2$.
3. Justifier pourquoi les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont sécants suivant une droite $\mathcal{D}$.
4. Déterminer alors le point $E\,(x_E, 1, z_E)$ de $\mathcal{D}$ et un vecteur directeur $\overrightarrow{u}$ de $\mathcal{D}$.
5. Déduire de la question précédente un système d'équations paramétrique de $\mathcal{D}$.
6. Déterminer la projection orthogonale H du point $F\,(3,4,1)$ sur le plan $\mathcal{P}_1$.

EX. 2 | Éléments de correction | Réf. 2132

1. Le plan $\mathcal{P}_1$ est déterminé par la donnée de 3 points non alignés, puisque les vecteurs $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$

ne sont pas colinéaires. Ainsi, $M(x,y,z) \in \mathcal{P}_1 \quad \Leftrightarrow \quad \left[\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right] = 0$. Comme $\overrightarrow{AM} \begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \\ z-1 \end{pmatrix}$, on en déduit après développement que :

$\left[\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right] = 2(x-1)+4(z-1)+2(y-1)-(z-1)+4(x-1)-4(y-1) = 6x+6y+3z-15$ et donc $\mathcal{P}_1 : \quad 2x+2y+z-5 =$

2. Le vecteur $\overrightarrow{n_2} \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix}$ étant un vecteur normal à $\mathcal{P}_2$, une équation cartésienne de $\mathcal{P}_2$ est de la forme $2x - 6y + 3z + d = 0$ où l'on détermine d à l'aide des coordonnées de D puisque l'on doit avoir $2x_D - 6y_D + 3z + d = 0$, ce qui donne ici $d = -1$, et finalement, une équation cartésienne de $\mathcal{P}_2$ est $2x - 6y + 3z - 1 = 0$.

3. Les deux vecteurs $\overrightarrow{n_1} \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \end{pmatrix} 3$, et $\overrightarrow{n_2} \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix}$ sont deux vecteurs normaux respectifs de $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ et sont clairement non colinéaires. Par conséquent, les deux plans sont sécants suivant une droite $\mathcal{D}$.

4. Un système d'équations cartésienne de $\mathcal{D}$ est clairement $\left\{ \begin{array}{l} 6x - 2y + 3z - 7 = 0 \\ 2x - 6y + 3z = 0 \end{array} \right.$. Ainsi :

- Le point E est tel que $y_E = 1$. Ses coordonnées $E(x_E, 1, z_E)$ satisfont ainsi le système : $\left\{ \begin{array}{l} 6x + 3z = 9 \\ 2x + 3z = 7 \end{array} \right.$ que l'on résout pour obtenir $E\left(-\dfrac{1}{2}, 1, 4\right)$.
- Un vecteur directeur $\overrightarrow{u}$ de $\mathcal{D}$ est $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{n_1} \wedge \overrightarrow{n_2}$ où $\overrightarrow{n_1}$ et $\overrightarrow{n_2}$ sont les deux vecteurs définis précédemment. Ainsi, $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 36 \\ -12 \\ -48 \end{pmatrix}$. Compte-tenu des coordonnées de $\overrightarrow{u}$, le vecteur $\overrightarrow{u'} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$ est aussi un vecteur directeur de $\mathcal{D}$ et c'est lui que l'on utilisera pour le paramétrage de $\mathcal{D}$.

5. Un système de représentation paramétrique de la droite $\mathcal{D}$ est ainsi $\left\{ \begin{array}{l} x = -\dfrac{1}{2} + 3t \\ y = 1 - 2t \\ z = 4 + 4t \end{array} \right.$ où $t \in \mathbb{R}$.

6. Compte-tenu du fait que $\mathcal{P}_1$ est défini par le point A et les deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ non colinéaires, un système de représentation paramétrique de $\mathcal{P}_1$ est $\left\{ \begin{array}{l} x = 1 - 2\alpha + \beta \\ y = 1 + \alpha - 2\beta \\ z = 1 + 2\alpha + 2\beta \end{array} \right.$, $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. Ainsi, $H(x,y,z)$ est le projeté orthogonal de F sur $\mathcal{P}$ si, et seulement si, il existe $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{FH} . \overrightarrow{AB} = 0 \\ \overrightarrow{FH} . \overrightarrow{AC} = 0 \\ \left\{ \begin{array}{l} x = 1 - 2\alpha + \beta \\ y = 1 + \alpha - 2\beta \\ z = 1 + 2\alpha + 2\beta \end{array} \right. \end{array} \right.$. Or $\overrightarrow{FH} \begin{pmatrix} -2 - 2\alpha + \beta \\ -3 + \alpha - 2\beta \\ 2\alpha + 2\beta \end{pmatrix}$.

Ainsi $\overrightarrow{FH} . \overrightarrow{AB} = 9\alpha + 1$ et $\overrightarrow{FH} . \overrightarrow{AC} = 9\beta + 4$.

Par conséquent, $\alpha = -\dfrac{1}{9}$ et $\beta = -\dfrac{4}{9}$. Par suite : $\left\{ \begin{array}{l} x_H = 1 - 2 \times \left(-\dfrac{1}{9}\right) + \left(-\dfrac{4}{9}\right) = \dfrac{7}{9} \\ y_H = 1 + \left(-\dfrac{1}{9}\right) - 2 \times \left(-\dfrac{4}{9}\right) = \dfrac{16}{9} \\ z = 1 + 2 \times \left(-\dfrac{1}{9}\right) + 2 \times \left(-\dfrac{4}{9}\right) = \dfrac{1}{3} \end{array} \right.$.