À noter & À garder en tête

Les éléments développés ci-après ne sont souvent que des indications pour aboutir à la solution, qui détaillent la plupart du temps un cheminement à suivre pour montrer le rèsultat demandé. La plupart des calculs sont laissés aux lecteurs. . .La mise en forme de certains calculs est faite de sorte à économiser de l'espace et donc du papier, mais il conviendrait de ne pas les écrire en ligne notamment comme cela l'est parfois.

Un peu de technique

Exercice| [5004] | 1| Inégalité de Cauchy-Schwarz

Soit $n \in \mathbb{N}$.
On considère a_1, a_2, . . ., a_n et b_1, b_2, . . ., b_n des réels.

(1). On définit la fonction p par : $p : \left| \begin{array}{lcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} (a_i x + b_i)^2 \end{array} \right.$.

Justifier que p est une fonction polynôme de degré 2.

(2). Déterminer de discriminant Δ de p.

(3). En remarquant et en justifiant que p est une fonction positive, montrer que :

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)$$

Éléments de correction

(1). Un calcul direct donne que :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R},\ p(x) &= \sum_{i=1}^{n} \left((a_i x)^2 + 2a_i b_i x + b_i^2\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} (a_i^2 x^2 + 2a_i b_i x + b_i^2) \\ &= \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2 x^2\right) + \left(\sum_{i=1}^{n} 2a_i b_i x\right) + \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right) \\ &= \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right) x^2 + 2\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right) x + \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right) \end{aligned}$$

et par suite, p est bien une fonction polynôme de degré 2 puisque de la forme $x \longmapsto ax^2 + bx + c$ avec :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} a &=& \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \\ b &=& 2\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right) \\ c &=& \displaystyle\sum_{i=1}^{n} b_i^2 \end{array} \right.$$

(2). Des notations précédentes, on en déduit que le discriminant Δ de p est donné par :

$$\begin{aligned} \Delta &= \left(2\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)\right)^2 - 4 \times \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right) \times \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right) \\ &= 4\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 - 4 \times \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right) \times \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right) \end{aligned}$$

(3). Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $p(x)$ est une somme de quantités toutes positives, donc est clairement positif.
Ainsi, p est une fonction polynôme toujours positive, c'est à dire qui ne change pas de signe, donc son discriminant est négatif au nul.

On en déduit donc que : $4\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 - 4 \times \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right) \times \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right) \leq 0$

ou encore que : $4\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \leq 4 \times \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right) \times \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)$.

et par suite, il vient que : $\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)$

Exercice| [5005] | 2| Histoire de téléscopage | Transformation d'Abel

(1). On considère deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de nombres réels. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=0}^{n} a_k\left(b_{k+1} - b_k\right) = a_n b_{n+1} - a_0 b_0 + \sum_{k=1}^{n}\left(a_{k-1} - a_k\right) b_k$$

(2). Justifier que : $\forall k \in \mathbb{N},\ 2^k = 2^{k+1} - 2^k$

puis montrer que : $\sum_{k=0}^{n} k 2^k = 2^{n+1}(n-1) + 2$

Éléments de correction

(1). Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} a_k\left(b_{k+1} - b_k\right) &= \sum_{k=0}^{n}\left(a_k b_{k+1} - a_k b_k\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n} a_k b_{k+1} - \sum_{k=0}^{n} a_k b_k \\
&\underset{j=k+1 \text{ dans la } 1^{\text{e}} \text{ somme}}{=} \sum_{j=1}^{n+1} a_{j-1} b_j - \sum_{k=0}^{n} a_k b_k \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} a_{k-1} b_k - \sum_{k=0}^{n} a_k b_k \\
&= \sum_{k=1}^{n} a_{k-1} b_k + a_n b_{n+1} - a_0 b_0 - \sum_{k=1}^{n} a_k b_k \\
&= a_n b_{n+1} - a_0 b_0 + \sum_{k=1}^{n}\left(a_{k-1} b_k - a_k b_k\right) \\
&= a_n b_{n+1} - a_0 b_0 + \sum_{k=1}^{n}\left(a_{k-1} - a_k\right) b_k
\end{aligned}$$

ce qui est la relation attendue.

(2). On a clairement que : $\forall k \in \mathbb{N},$
$$\begin{aligned}
2^{k+1} - 2^k &= 2^k\left(2^1 - 1\right) \\
&= 2^k(2-1) \\
&= 2^k
\end{aligned}$$

Par suite, d'après la question précédente, il vient que :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} k2^k &= \sum_{k=0}^{n} k\left(2^{k+1}-2^k\right)\\
&= n\times 2^{n+1} - 0\times 2^0 + \sum_{k=1}^{n}((k-1)-k)\times 2^k\\
&= n\times 2^{n+1} - \sum_{k=1}^{n} 2^k\\
&= n\times 2^{n+1} - \left(\sum_{k=0}^{n} 2^k - 2^0\right)\\
&= n\times 2^{n+1} - \left(\frac{1-2^{n+1}}{1-2} - 1\right)\\
&= n\times 2^{n+1} - \left(2^{n+1}-1-1\right)\\
&= n\times 2^{n+1} - 2^{n+1} + 2\\
&= 2^{n+1}(n-1)+2
\end{aligned}$$

ce qui est bien le résultat voulu.

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

Exercice| [5003] | 3| Déclinaison autour du binôme de Newton

Dans tout cet exercice x désigne un réel strictement positif et n un entier naturel supérieur ou égal à 1.

On pose alors : $S = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{2n}{2k} x^k$ et $T = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n}{2k+1} x^k$.

(1). Soit $t \in \mathbb{R}$. Exprimer en fonction de t et de n, les deux sommes $U = \displaystyle\sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} t^k$ et $V = \displaystyle\sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} (-t)^k$.

(2). En prenant $t = \sqrt{x}$, vérifier que l'on a les relations $\begin{cases} S + tT = U \\ S - tT = V \end{cases}$.

(3). Exprimer alors $U+V$ et $U-V$ en fonction de S, T et t avec $t = \sqrt{x}$.

(4). En déduire alors les expressions de S et T en fonction de x et de n.

Éléments de correction

(1). Il est clair que :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} t^k &\underset{1^{2n-k}=1}{=} \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} t^k \times (1)2n-k\\
&= (t+1)^{2n}
\end{aligned}$$

et sur le même principe :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} t^k &\underset{1^{2n-k}=1}{=} \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} (-t)^k \times (1)2n-k\\
&= (1-t)^{2n}\\
&\underset{2n \text{ pair}}{=} (t-1)^{2n}
\end{aligned}$$

ce qui amène donc à $U = (t+1)^{2n}$ et $V = (t-1)^{2n}$.

(2). Comme $x > 0$, on peut poser $t = \sqrt{x}$.

Un calcul direct donne que :
$$\begin{aligned}
U &= \sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k}\left(\sqrt{x}\right)^k\\
&= \sum_{p=0}^{n}\binom{2n}{2p}\left(\sqrt{x}\right)^{2p} + \sum_{p=0}^{n-1}\binom{2n}{2p+1}\left(\sqrt{x}\right)^{2p+1}\\
&= \sum_{p=0}^{n}\binom{2n}{2p}\left(\left(\sqrt{x}\right)^2\right)^p + \sum_{p=0}^{n-1}\binom{2n}{2p+1}\left(\sqrt{x}\right)^{2p}\times\sqrt{x}\\
&= \underbrace{\sum_{p=0}^{n}\binom{2n}{2p}x^p}_{=S} + \sqrt{x}\sum_{p=0}^{n-1}\binom{2n}{2p+1}\left(\left(\sqrt{x}\right)^2\right)^p\\
&= S+\sqrt{x}\times\underbrace{\sum_{p=0}^{n-1}\binom{2n}{2p+1}x^p}_{=T}\\
&= S+tT
\end{aligned}$$
et un calcul similaire donne que :
$$\begin{aligned}
V &= \sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k}\left(-\sqrt{x}\right)^k\\
&= \sum_{p=0}^{n}\binom{2n}{2p}\left(-\sqrt{x}\right)^{2p} + \sum_{p=0}^{n-1}\binom{2n}{2p+1}\left(-\sqrt{x}\right)^{2p+1}\\
&= \sum_{p=0}^{n}\binom{2n}{2p}\left(\left(-\sqrt{x}\right)^2\right)^p + \sum_{p=0}^{n-1}\binom{2n}{2p+1}\left(-\sqrt{x}\right)^{2p}\times\left(-\sqrt{x}\right)\\
&= \underbrace{\sum_{p=0}^{n}\binom{2n}{2p}x^p}_{=S} - \sqrt{x}\sum_{p=0}^{n-1}\binom{2n}{2p+1}\left(\left(\sqrt{x}\right)^2\right)^p\\
&= S-\sqrt{x}\times\underbrace{\sum_{p=0}^{n-1}\binom{2n}{2p+1}x^p}_{=T}\\
&= S-tT
\end{aligned}$$
On en déduit alors les relations demandées.

(3). Il vient directement que :
$$\begin{aligned}
U+V &= S+tT+S-tT\\
&= 2S
\end{aligned}$$
et que :
$$\begin{aligned}
U-V &= S+tT-(S-tT)\\
&= S+tT-S+tT\\
&= 2tT
\end{aligned}$$

(4). En posant $t=\sqrt{x}>0$ par hypothèse, puisque $2S=U+V$, il vient que $S=\dfrac{U+V}{2}$ ce qui donne d'après ce qui précède que :
$$S=\frac{(1+t)^{2n}+(1-t)^{2n}}{2}$$
De même, puisque $2tT=U-V$, il vient que $T=\dfrac{U-V}{2t}$, qui a du sens puisque $t>0$, ce qui donne d'après ce qui précède que :
$$T=\frac{(1+t)^{2n}-(1-t)^{2n}}{2t}$$
Il reste alors à substituer $\sqrt{x}$ à t pour obtenir les expressions souhaitées.