Consignes générales | Important

On attachera une **grande importance à la rédaction des réponses**, résoudre un exercice de mathématiques ne consiste nullement à produire un enchaînement ou enchevêtrement d'écritures algébriques sans explications ou commentaires. La longueur d'une réponse n'a rien à voir avec la longueur de la question. . . **On fera donc apparaître tous les résultats et raisonnements intermédiaires qui ont permis d'aboutir à la solution**.

Dans le cas où un(e) étudiant(e) repère ce qui lui semble être une **erreur d'énoncé**, il (elle) le signale très rapidement au **professeur**.

Travailler les fondamentaux

EX. 1 | Réf. 4628

Déterminer la solution développable en série entière au voisinage de 0 du problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} (\star) : \ y''(x) - 2xy'(x) - 2y(x) = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

et l'exprimer à l'aide des fonctions usuelles.

EX. 2 | Réf. 4629

1. Former le développement en série entière de la fonction $f : x \longmapsto \ln\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)$.
2. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\sum \dfrac{x^{2n+2}}{(n+1)(2n+1)}$ dont on notera S sa somme sur $]-R;R[$, et préciser la valeur de $S(0)$.
3. Déterminer $S'(x)$ pour tout $x \in \,]-R;R[$.
4. En déduire l'expression de S sur $]-R;R[$.
5. Calculer alors la somme de la série numérique $\sum \dfrac{1}{(n+1)(2n+1)}$

Préparation à l'oral

EX. 3 | Réf. 4630

On admet que le rayon de convergence de la série entière $\sum \dfrac{n!}{1\times 3\times \ldots \times (2n+1)}x^n$ est égal à 2. On note alors S la somme de cette série entière sur $]-2;2[$.
Former une équation différentielle linéaire d'ordre 1 dont S est solution sur $]-2;2[$.

Mobiliser toutes ses connaissances

EX. 4 | Réf. 4432

1. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\sum \dfrac{n!}{1\times 3\times \ldots \times (2n+1)}x^{2n+1}$.
2. En notant R le rayon de convergence de cette série et S sa somme sur $]-R;R[$, montrer que S est solution de l'équation différentielle (E) suivante :

$$(\star) : \quad \left(x^2-2\right)y' + xy + 2 = 0$$

3. Résoudre cette équation différentielle et en déduire l'expression de S sur $]-R;R[$.

Pour s'occuper les jours de pluies

EX. 5 | Réf. 4342

On désigne par $(\star)$ l'équation différentielle linéaire d'ordre 2 suivante :

$$(\star) : \quad x^2 y'' - x\left(2x^2 - 1\right) y' - \left(2x^2 + 1\right) y = 0$$

1. Soit $f : x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ définie sur $\mathbb{R}^*$.
Montrer que f est une solution de $(\star)$ sur chacun des intervalles $]-\infty; 0[$ et $]0; +\infty[$.

2. On se propose dans cette question de déterminer les fonctions solutions de $(\star)$ qui sont développables en série entière.
Soit alors $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$ dont on note S la somme, c'est à dire que :

$$\forall x \in]-R; R[, \quad S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

On suppose pour la suite de cette question que la fonction S est solution de $(\star)$ sur $]-R; R[$.

a. Exprimer pour $x \in]-R; R[$, $S'(x)$ et $S''(x)$.

b. Démontrer que $a_0 = 0$ et que pour tout entier $n \geq 2$, on a : $\quad a_n = \dfrac{2}{n+1} a_{n-2}$.

c. Calculer a_2. Plus généralement, que vaut a_n si n est un entier pair ?

d. Si n est impair, on écrit $n = 2p + 1$ où $p \in \mathbb{N}$.
Pour tout entier p supérieur ou égal à 1, exprimer a_{2p+1} en fonction de a_{2p-1}.
Montrer alors que pour tout entier naturel p : $\quad a_{2p+1} = \dfrac{a_1}{(p+1)!}$.

3. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum_{p \geq 0} \frac{x^{2p+1}}{(p+1)!}$.

4. Donner, sans démonstration, les développements en série entière des fonctions $x \longmapsto \mathrm{e}^{x}$ et $x \longmapsto \mathrm{e}^{x^2}$.

5. On note pour tout réel x, $g(x) = \displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{x^{2p+1}}{(p+1)!}$. Que vaut $g(0)$?

Exprimer pour tout réel x non nul, $g(x)$ en fonction de e^{x^2} et de x.

6. Préciser la dimension de l'espace vectoriel des solutions sur $]0; +\infty[$ de l'équation différentielle $(\star)$, puis exprimer les solutions de $(\star)$ sur l'intervalle $]0; +\infty[$ à l'aide des fonctions f et g.