Consignes générales | Important

On attachera une **grande importance à la rédaction des réponses**, résoudre un exercice de mathématiques ne consiste nullement à produire un enchaînement ou enchevêtrement d'écritures algébriques sans explications ou commentaires. La longueur d'une réponse n'a rien à voir avec la longueur de la question. . . **On fera donc apparaître tous les résultats et raisonnements intermédiaires qui ont permis d'aboutir à la solution**.

Dans le cas où un(e) étudiant(e) repère ce qui lui semble être une **erreur d'énoncé**, il (elle) le signale très rapidement au **professeur**.

Je m'entraîne à rédiger

EX. 1 | Réf. 4355

Déterminer le rayon de convergence de la série entière de la variable réelle $\sum \dfrac{n+2}{n\left(n^2-1\right)} x^n$, puis en exprimer sa somme sur son intervalle ouvert de convergence à l'aide des fonctions usuelles.

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

EX. 2 | Réf. 4354

L'objet de ce problème consiste en l'étude de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$(\star) : \quad \left\{ \begin{array}{rcl} u_0 & \in &]0;1[\\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} & = & \sqrt{u_n^2 - u_n + 1} \end{array} \right.$$

Dans tout ce problème, f désignera la fonction $f : x \longmapsto \sqrt{x^2 - x + 1}$.

1. Vérifier que : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad x^2 - x + 1 = \left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{3}{4}$.
2. En déduire le domaine de définition de f, et justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est bien défini.
3. À l'aide de la première question, montrer que : $\forall x \in [0;1], \quad f(x) \in [0;1]$.
4. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \in [0;1]$.
5. Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, calculer $f'(x)$.
6. Dresser le tableau des variations de f sur $[0;1]$.
7. Montrer que : $\forall x \in [0;1], \quad f(x) \geq x$.
8. Montrer que : $\forall x \in [0;1], \quad |f'(x)| \leq \dfrac{1}{\sqrt{3}}$
9. Calculer $f(1)$.
10. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad |1 - u_{n+1}| \leq \dfrac{1}{\sqrt{3}} |1 - u_n|$
11. En déduire alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une majoration de $|1 - u_n|$ en fonction de n et de $|1 - u_0|$.
12. En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.

Pour s'occuper les jours de pluies

EX. 3 | Réf. 1578

1. Justifier la convergence de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} P(t) \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}} \, \mathrm{d}t$ pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$.

   On admet que l'application φ définie par $\varphi(P,Q) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} P(t)Q(t)\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}} \, \mathrm{d}t$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Soient $h : x \longmapsto \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$ et pour $n \in \mathbb{N}$, $H_n : x \longmapsto (-1)^n \mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}} h^{(n)}(x)$.
   a. Trouver une relation entre H_{n+1}, H_n et H_n'.
   b. Montrer que H_n est un polynôme de degré n.

Les polynômes H_n sont appelés les polynômes de Hermite.

c. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad H_{n+1} = XH_n + nH_{n-1}$$

et en déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad H_n' = nH_{n-1}$.

d. Montrer que : $\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} H_k(t)\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t = 0.$

3. Montrer que les polynômes d'Hermite sont orthogonaux pour le produit scalaire défini précédemment.