

**Important**

On attachera une **grande importance à la rédaction des réponses**, résoudre un exercice de mathématiques ne consiste nullement à produire un enchaînement ou enchevêtrement d'écritures algébriques sans explications ou commentaires. La longueur d'une réponse n'a rien à voir avec la longueur de la question... **On fera donc apparaître tous les résultats et raisonnements intermédiaires qui ont permis d'aboutir à la solution.**

Dans le cas où un(e) étudiant(e) repère ce qui lui semble être une **erreur d'énoncé**, il (elle) le signale très rapidement au **professeur**.

Un peu de technique**Exercice [1102] | 1 | Intégrales généralisées**

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^1 \sqrt{x} (\ln(x))^n dx$.

- (1). Établir la convergence de I_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- (2). Établir une relation entre I_{n+1} et I_n , pour $n \in \mathbb{N}$.
- (3). Déterminer l'expression de I_n en fonction de n .
- (4). Montrer la convergence de la série de terme général $\frac{1}{I_n}$ et calculer la somme de cette série.

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances**Exercice [5172] | 2 | Étude d'un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[x]$**

Soient $a \in \mathbb{R}$ et φ l'application donnée par :

$$\varphi : \begin{cases} \mathbb{R}_n[x] & \longrightarrow \mathbb{R}[x] \\ P & \longmapsto (x-a)(P'(x) + P'(a)) - 2(P(x) - P(a)) \end{cases}$$

- (1). Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[x]$.
- (2). Calculer $(\varphi(P))''$ pour tout $P \in \mathbb{R}_n[x]$. En déduire que $\dim(\text{Ker}(\varphi)) \leq 3$.
- (3). Démontrer que $\varphi(P)$ est divisible par $(x-a)^3$ pour tout $P \in \mathbb{R}_n[x]$.
- (4). En déduire $\text{Im}(\varphi)$ et $\text{Ker}(\varphi)$.