Éléments de correction

Les indications qui suivent ne sont là que pour vous aider à démarrer la résolution des situations proposées. Elles sont énoncées en s'appuyant sur les éléments développés en cours. D'autres solutions ou pistes de résolution sont bien évidemment possibles et vous êtes vivement encouragés à les mener jusqu'au bout. Si certains points du devoir restent délicats à mettre en oeuvre, n'hésitez pas à me solliciter, ou même à en discuter avec vos camarades, de tels échanges étant très souvent bénéfiques!

Il est peu pertinent et presque inutile de s'approprier sans réflexion le travail d'un autre puisque de toute façon, la sanction tombera d'elle même lors des évaluations en classe en temps limité.

Je m'entraîne à rédiger

EX. 1 | Réf. 4355

Déterminer le rayon de convergence de la série entière de la variable réelle $\sum \dfrac{n+2}{n\left(n^2-1\right)}x^n$, puis en exprimer sa somme sur son intervalle ouvert de convergence à l'aide des fonctions usuelles.

EX. 1 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 4355

- On pourra utiliser le critère de d'Alembert pour les séries numériques à termes strictement positifs pour déterminer le rayon de convergence de la série entière.
- Pour le calcul de la somme, on pourra remarquer et montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\}\,,\quad \dfrac{n+2}{n\left(n^2-1\right)} = \dfrac{1}{2(n+1)} - \dfrac{2}{n} + \dfrac{3}{2(n-1)}$

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

EX. 2 | Réf. 4354

L'objet de ce problème consiste en l'étude de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$(\star) : \quad \left\{\begin{array}{rcl} u_0 & \in &]0;1[\\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} & = & \sqrt{u_n^2 - u_n + 1} \end{array}\right.$$

Dans tout ce problème, f désignera la fonction $f : x \longmapsto \sqrt{x^2-x+1}$.

1. Vérifier que : $\forall x \in \mathbb{R},\quad x^2-x+1 = \left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{3}{4}$.
2. En déduire le domaine de définition de f, et justifer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est bien défini.
3. À l'aide de la première question, montrer que : $\forall x \in [0;1]\,,\quad f(x) \in [0;1]$.
4. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N},\quad u_n \in [0;1]$.
5. Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, calculer $f'(x)$.
6. Dresser le tableau des variations de f sur $[0;1]$.
7. Montrer que : $\forall x \in [0;1]\,,\quad f(x) \geq x$.
8. Montrer que : $\forall x \in [0;1]\,,\quad |f'(x)| \leq \dfrac{1}{\sqrt{3}}$
9. Calculer $f(1)$.
10. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N},\quad |1-u_{n+1}| \leq \dfrac{1}{\sqrt{3}}\,|1-u_n|$
11. En déduire alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une majoration de $|1-u_n|$ en fonction de n et de $|1-u_0|$.
12. En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.

EX. 2 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | `Réf. 4354`

1. On développe et cela tombe tout seul...
2. Ce qui est sous le radical est donc positif...
3. Manipuler le résultat de la question 1 pour obtenir l'encadrement souhaité.
4. Un petit raisonnement par récurrence permet de le montrer simplement.
5. RAS
6. On étudie proprement le signe de la dérivée sur l'intervalle proposé.
7. La quantité conjuguée est notre amie ici...
8. RAS
9. On applique un processus de construction graphique connu.
10. On pourra utiliser notre connaissance du minimum de f pour obtenir la majoration voulue.
11. RAS
12. Appliquer l'inégalité des accroissements finies.
13. C'est le résultat précédent appliqué à des valeurs bien choisies.
14. Il y a un pseudo-processus géométrique pour obtenir la majoration souhaitée.
15. Le théorème d'encadrement permettra de conclure.

Pour s'occuper les jours de pluies

EX. 3 | `Réf. 1578`

1. Justifier la convergence de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} P(t)\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t$ pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$.

   On admet que l'application φ définie par $\varphi(P,Q) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} P(t)Q(t)\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Soients $h : x \longmapsto \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$ et pour $n \in \mathbb{N}$, $H_n : x \longmapsto (-1)^n \mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}} h^{(n)}(x)$.
   - **a.** Trouver une relation entre H_{n+1}, H_n et H_n'.
   - **b.** Montrer que H_n est un polynôme de degré n.
     Les polynômes H_n sont appelés les polynômes de Hermite.
   - **c.** Montrer que :
     $$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad H_{n+1} = XH_n + nH_{n-1}$$
     et en déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad H_n' = nH_{n-1}$.
   - **d.** Montrer que : $\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} H_k(t)\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t = 0.$
3. Montrer que les polynômes d'Hermite sont orthogonaux pour le produit scalaire défini précédemment.

EX. 3 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | `Réf. 1578`

1. Chercher un équivalent d'une expression du type $P(t)\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}$.
2. **a.** On exprime les trois expressions et on les combine.
   - **b.** On effectue un raisonnement par récurrence sur le degré de H_n.
   - **c.** La formule de Leibniz...
   - **d.** On intègre en utilisant les dérivées n^{e} de h.
3. On calcule tous les produits scalaires nécessaires...