## Éléments de réflexion | Pistes de recherche

Les éléments développés ci-après ne sont souvent que des indications pour aboutir à la solution, qui détaillent la plupart du temps un cheminement à suivre pour montrer le rèsultat demandé. La plupart des calculs sont laissés aux lecteurs. . .La mise en forme de certains calculs est faite de sorte à économiser de l'espace et donc du papier, mais il conviendrait de ne pas les écrire en ligne notamment comme cela l'est parfois.

## Un peu de technique

### EX. 1| Réf. 2147

Résoudre, en discutant les valeurs de $k \in \mathbb{R}$, le système ci-contre.

$$\mathcal{S} \quad : \quad \begin{cases} x + 2y + kz = 1 \\ 3x + 4y + 2z = k \\ 2x + 3y - \ \ z = 1 \end{cases}$$

### EX. 1| Éléments de correction | Réf. 2147

Écrivons la matrice augmentée du système $\mathcal{S}$ et échelonnons dans un premier temps cette dernière.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & k & 1 \\ 3 & 4 & 2 & k \\ 2 & 3 & -1 & 1 \end{array}\right) \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1}}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & k & 1 \\ 0 & -2 & 2-3k & k-3 \\ 0 & -1 & -1-2k & -1 \end{array}\right)$$

$$\underset{L_3 \leftarrow 2L_3 + L_2}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & k & 1 \\ 0 & -2 & 2-3k & k-3 \\ 0 & 0 & 4+k & k-1 \end{array}\right)$$

Pour pouvoir poursuivre l'échelonnement du système et le mettre sous forme échelonné réduit, il faut procéder à l'opération $L_3 \leftarrow \dfrac{1}{k+4} L_3$, qui est conditionnée par le fait que $k+4$ ne doit pas être nul.

- Si $k + 4 \neq 0$, c'est à dire $k \neq -4$, on poursuit l'échelonnement :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & k & 1 \\ 0 & -2 & 2-3k & k-3 \\ 0 & 0 & 4+k & k-1 \end{array}\right) \underset{L_3 \leftarrow \frac{1}{k+4} L_3}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & k & 1 \\ 0 & -2 & 2-3k & k-3 \\ 0 & 0 & 1 & \dfrac{k-1}{k+4} \end{array}\right)$$

$$\underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - (2-3k)L_3 \\ L_1 \leftarrow L_1 - kL_3}}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & \dfrac{5}{k+4} \\ 0 & -2 & 0 & \dfrac{2\left(2k^2-2k+5\right)}{k+4} \\ 0 & 0 & 1 & \dfrac{k-1}{k+4} \end{array}\right)$$

$$\underset{L_1 \leftarrow L_1 + L_2}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \dfrac{3k^2-2k-6}{k+4} \\ 0 & -2 & 0 & \dfrac{2\left(2k^2-2k+5\right)}{k+4} \\ 0 & 0 & 1 & \dfrac{k-1}{k+4} \end{array}\right)$$

$$\underset{L_2 \leftarrow -\frac{1}{2} L_2}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \dfrac{3k^2-2k-6}{k+4} \\ 0 & 1 & 0 & \dfrac{-2k^2+2k-5}{k+4} \\ 0 & 0 & 1 & \dfrac{k-1}{k+4} \end{array}\right)$$

Par conséquent, dans le cas où $k \neq -4$, l'ensemble des solutions du système est $\left\{\left(\dfrac{3k^2-2k-6}{k+4}, \dfrac{-2k^2+2k+5}{k+4}, \dfrac{k-1}{k+4}\right)\right\}$.

- Si $k+4=0$, c'est à dire $k=-4$, en remplaçant $k$ par cette valeur dans la dernière matrice augmentée, on obtient : $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & k & 1 \\ 0 & -2 & 2-3k & k-3 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{array}\right)$, la dernière ligne de celle-ci donnant l'équation de compatibilité « $0=-5$ », qui permet de conclure quant à l'incompatibilité du système dans ce cas là.

## Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

### EX. 2 | Réf. 2380

**1.** Montrer que l'ensemble $\mathcal{S}$ des points $M(x,y,z)$ tels que :

$$x^2+y^2+z^2-4x+2z+1=0$$

est une sphère de l'espace dont on déterminera le centre $\Omega$ et le rayon $R$.

**2.** Montrer que le point $A(2,2,-1)$ appartient à $\mathcal{S}$ et déterminer une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}_1$ tangent à $\mathcal{S}$ au point $A$.

**3.** **a.** Montrer que le plan $\mathcal{P}_2$ d'équation $x+y-z-1=0$ coupe $\mathcal{S}$.

**b.** Déterminer le rayon $r$ du cercle $\mathcal{C}$ d'intersection de $\mathcal{P}_2$ avec $\mathcal{S}$.

**c.** Déterminer les coordonnées du point $\Omega'$, centre de $\mathcal{C}$.

### EX. 2 | Éléments de correction | Réf. 2380

**1.** On a à l'aide de l'identité remarquable $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$ que :

$$\begin{array}{rcl} M(x,y,z)\in\mathcal{S} & \Leftrightarrow & x^2+y^2+z^2-4x+2z+1=0 \\ & \Leftrightarrow & (x-2)^2-4+y^2+(x+1)^2-1+1=0 \\ & \Leftrightarrow & (x-2)^2+y^2+(z+1)^2=4 \end{array}$$

Ainsi, $\mathcal{S}$ est la sphère de centre $\Omega(2,0,-1)$ et de rayon $R=2$.

**2.** Les coordonnées de $A$ vérifient l'équation cartésienne de $\mathcal{S}$, donc $A$ appartient à $\mathcal{S}$.
Le plan $\mathcal{P}_1$ tangent à $\mathcal{S}$ au point $A$ est le plan contenant $A$ et de vecteur normal $\overrightarrow{\Omega A}$. On a donc :

$$M(x,y,z)\in\mathcal{P}_1 \quad\Leftrightarrow\quad \overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{\Omega A}=0 \quad\Leftrightarrow\quad y-2=0$$

et par suite le plan $\mathcal{P}_1$ admet pour équation cartésienne $y=2$.

**3.** **a.** Le plan $\mathcal{P}_2$ coupe la sphère $\mathcal{S}$ si, et seulement si, $d=d(\Omega,\mathcal{P}_2)\leq 2$.
Or $d=d(\Omega,\mathcal{P}_2)=\dfrac{|2+0+1-1|}{\sqrt{3}}=\dfrac{2}{\sqrt{3}}<2$, donc l'intersection de $\mathcal{S}$ et $\mathcal{P}_2$ est bien un cercle $\mathcal{C}$.

**b.** En notant $r$ le rayon du cercle $\mathcal{C}$, d'après le théorème de Pythagore, on a $d^2+r^2=R^2$. Ainsi, on en déduit que $r=\dfrac{2}{3}\sqrt{6}$.

**c.** Déterminons les coordonnées du point $\Omega'$ centre du cercle $\mathcal{C}$. Le point $\Omega'$ est le projeté orthogonal du point $\Omega$ sur $\mathcal{P}_2$. Soit $\mathcal{D}$ la droite contenant $\Omega$ et de vecteur directeur un vecteur normal $\overrightarrow{n}$ au plan $\mathcal{P}_2$. Le point $\Omega'$ est le point d'intersection de $\mathcal{D}$ et de $\mathcal{P}_2$. En choisissant $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$, on obtient pour la droite $\mathcal{D}$ le paramétrage

$$\left\{\begin{array}{l} x=2+t \\ y=t \\ z=-1-t \end{array}\right. \quad \text{où } t\in\mathbb{R}.$$

L'intersection de $\mathcal{D}$ et $\mathcal{P}_2$ est le point de paramètre $t$ vérifiant $(2+t)+t-(-1-t)-1=0$, soit $t=-\dfrac{2}{3}$ et on en déduit que $\Omega'$ a pour coordonnées $\left(\dfrac{4}{3},-\dfrac{2}{3},\dfrac{2}{3}\right)$.