Éléments de réflexion | Pistes de recherche

Les éléments développés ci-après ne sont souvent que des indications pour aboutir à la solution, qui détaillent la plupart du temps un cheminement à suivre pour montrer le rèsultat demandé. La plupart des calculs sont laissés aux lecteurs. . .La mise en forme de certains calculs est faite de sorte à économiser de l'espace et donc du papier, mais il conviendrait de ne pas les écrire en ligne notamment comme cela l'est parfois.

Un peu de technique

EX. 1 | Réf. 1755

Montrer que les représentations suivantes définissent le même plan :

$$\begin{cases} x = 2+s+2t \\ t = 2+2s+t \\ z = 1-s-t \end{cases} \text{ où } (s,t)\in\mathbb{R}^2 \qquad \text{et} \qquad \begin{cases} x = 1+3u-v \\ y = 3+3u+v \\ z = 1-2u \end{cases} \text{ où } (u,v)\in\mathbb{R}^2$$

EX. 1 | Éléments de correction | Réf. 1755

On désigne par $\mathcal{P}_1$ le plan donné par $\mathcal{P}_1$: $\begin{cases} x = 2+s+2t \\ t = 2+2s+t \\ z = 1-s-t \end{cases}$ où $(s,t)\in\mathbb{R}^2$ et par $\mathcal{P}_2$ le plan donné par $\mathcal{P}_2$: $\begin{cases} x = 1+3u-v \\ y = 3+3u+v \\ z = 1-2u \end{cases}$ où $(u,v)\in\mathbb{R}^2$.

Le vecteur $\overrightarrow{n_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à $\mathcal{P}_1$.

De même, le vecteur $\overrightarrow{n_2} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à $\mathcal{P}_2$.

Ces deux vecteurs sont clairement colinéaires. Par conséquent les deux plans sont parallèles.

Reste à trouver un point de $\mathcal{P}_1$ qui appartient à $\mathcal{P}_2$ (ou le contraire). Le point $A_1\,(2,2,1)$ appartient à $\mathcal{P}_1$.

Pour montrer que A_1 appartient à $\mathcal{P}_2$, il suffit de déterminer un couple de paramètres (u_1,v_1) tel que $\begin{cases} x_{A_1} = 1+3u_1-v_1 \\ y_{A_1} = 3+3u_1+v_1 \\ z_{A_1} = 1-2u_1 \end{cases}$.

On doit donc résoudre le système $\begin{cases} 1+3u_1-v_1 = 2 \\ 3+3u_1+v_1 = 2 \\ 1-2u_1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3u_1-v_1 = 1 \\ 3u_1+v_1 = -1 \\ 2u_1 = 0 \end{cases}$.

Or on a : $\begin{cases} 3u_1-v_1 = 1 \\ 3u_1+v_1 = -1 \\ 2u_1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow u_1 = 0$ et $v_1 = -1$. Par conséquent, le point A_1 appartient bien à $\mathcal{P}_1$.

Ainsi $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont deux plans parallèles qui ont un point commun. Ils sont donc confondus.

EX. 2 | Réf. 0624

Déterminer la projection orthogonale de la droite $\mathcal{D}$ d'équations $\begin{cases} x+y+z = 1 \\ x-y-2z = 0 \end{cases}$ sur le plan $\mathcal{P}$ d'équation $x+2y+3z = 0$.

EX. 2 | Éléments de correction | Réf. 0624

On note Δ la projection orthogonale de $\mathcal{D}$ sur le plan $\mathcal{P}$, A le point d'intersection de $\mathcal{D}$ et $\mathcal{P}$ (on s'assurera qu'il y en a...), $\overrightarrow{u}$ un vecteur directeur de $\mathcal{D}$ et $\overrightarrow{n}$ un vecteur normal de $\mathcal{P}$.
Le vecteur $\overrightarrow{u}$ peut s'écrire comme combinaison linéaire de $\overrightarrow{t}$ où $\overrightarrow{t}$ dirige Δ et de $\overrightarrow{n}$ où $\overrightarrow{n}$ est normal à $\mathcal{P}$.
La droite Δ ainsi cherchée est la droite qui passe par A et de vecteur directeur $\overrightarrow{t}$.
La situation est illustrée ci-contre.

- **Recherche du point d'intersection de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{D}$:** si le système d'équations formé par les deux équations cartésiennes de $\mathcal{D}$ et celle de $\mathcal{P}$ admet une unique solution, la droite $\mathcal{D}$ et le plan $\mathcal{P}$ seront sécant en un seul point.
  L'écriture matricielle de ce système est $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{array}\right)$ qui après échelonnement réduit en ligne est équivalent en ligne à $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{array}\right)$.
  Ainsi, ce système admettant une unique solution, la droite $\mathcal{D}$ et le plan $\mathcal{P}$ sont sécants en un seul point, le point $A(-1, 5, 3)$.
- **Recherche d'un vecteur directeur de Δ :** le vecteur $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal de $\mathcal{P}$, et le vecteur $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ dirige $\mathcal{D}$.
  On cherche à décomposer $\overrightarrow{u}$ comme combinaison linéaire de $\overrightarrow{n}$ et de $\overrightarrow{t}$ avec $\overrightarrow{t}$ qui dirige Δ, c'est à dire que l'on cherche un vecteur $\overrightarrow{t}$ dirigeant Δ et un réel α tel que $\overrightarrow{u} = \alpha\overrightarrow{n} + \overrightarrow{t}$.
  Ainsi $\overrightarrow{t}\begin{pmatrix} -1-\alpha \\ 3-2\alpha \\ -2-3\alpha \end{pmatrix}$. Or $\overrightarrow{t}$ est un vecteur contenu dans la direction du plan $\mathcal{P}$, puisque dirigeant Δ qui est elle même incluse dans $\mathcal{P}$. On a donc $\overrightarrow{t}$ et $\overrightarrow{n}$ orthogonaux, ce qui se traduit par $\overrightarrow{t}.\overrightarrow{n} = 0$ et qui amène à l'équation $1 \times (-1-\alpha) + 2(3-2\alpha) + 3(-2-3\alpha) = 0$, soit $\alpha = -\dfrac{1}{14}$.
  Finalement, il vient que $\overrightarrow{t} = \dfrac{1}{14}\begin{pmatrix} -13 \\ 44 \\ -25 \end{pmatrix}$.

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

EX. 3 | Réf. 2319

Résoudre sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right[$ l'équation différentielle (E) : $y' - \tan(x)\, y = -\cos^2(x)$, puis déterminer la solution f de (E) sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right[$ qui vérifie $f\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = 1$.

EX. 3 | Éléments de correction | Réf. 2319

(E) est une équation différentielle linéaire d'ordre 1 de la forme $y + a(x) = b(x)$ avec $a : x \longmapsto -\tan(x)$ et $b : x \longmapsto -\cos^2(x)$. Ces deux fonctions sont clairement continues sur l'intervalle $\left]-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right[$.

- **Résolution de $(E_H) : y' - \tan(x)y = 0$:** la fonction $x \longmapsto -\tan(x)$ est continue sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right[$ et y admet pour primitive $x \longmapsto \ln(\cos(x))$.

Ainsi, les solutions sur $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ de (E_H) sont les fonctions : $x \longmapsto C\mathrm{e}^{\ln(\cos(x))} = C\frac{1}{\cos(x)}$ où $C \in \mathbb{R}$.

- **Recherche d'une solution particulière y_0 de (E) sur $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$** : on cherche une solution particulière y_0 de (E) sur $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ sous la forme $y_0 : x \longmapsto \frac{\varphi(x)}{\cos(x)}$ où $\varphi : \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[\longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction à déterminer.
  Pour tout $x \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$, $y_0'(x) = \frac{\varphi'(x)\cos(x)+\varphi(x)\sin(x)}{\cos^2(x)}$. Par suite :

$$\begin{aligned} y_0 \text{ est solution de } (E) \text{ sur } \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[&\Leftrightarrow \forall x \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[, \quad \frac{\varphi'(x)\cos(x)+\varphi(x)\sin(x)}{\cos^2(x)} - \tan(x)\times\frac{\varphi(x)}{\cos(x)} = -\cos^2(x) \\ &\Leftrightarrow \forall x \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[, \quad \frac{\varphi'(x)}{\cos(x)} = -\cos^2(x) \\ &\Leftrightarrow \forall x \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[, \quad \varphi'(x) = -\cos^3(x) \text{ puisque } \cos(x)\neq 0 \text{ sur } \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[\end{aligned}$$

  On cherche une primitive sur $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ de $x \longmapsto -\cos^3(x)$ en linéarisant cette expression. Pour cela, on utilise la formule d'Euler qui donne $\cos(x) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2}$, puis on développe $\cos^3(x)$. On obtient alors $\cos^3(x) = \frac{1}{4}\cos(3x) + \frac{3}{4}\cos(x)$.
  Finalement, il vient que : $\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$, $\varphi(x) = -\frac{1}{12}\sin(3x) - \frac{3}{4}\sin(x)$ et $y_0(x) = \frac{1}{\cos(x)}\left(-\frac{1}{12}\sin(x)-\frac{3}{4}\sin(x)\right)$.
- **Solution de (E) sur $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$:** $x \longmapsto \frac{1}{\cos(x)}\left(-\frac{1}{12}\sin(x)-\frac{3}{4}\sin(x)\right) + \frac{C}{\cos(x)}$ où $C \in \mathbb{R}$.
- **Recherche de f :** d'après le théorème de Cauchy-linéaire, il existe une unique fonction f solution de (E) sur $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ telle que $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = 1$.
  Puisque f est solution de (E) sur $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$, donc est de la forme : $\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$, $f(x) = \frac{1}{\cos(x)}\left(-\frac{1}{12}\sin(x)-\frac{3}{4}\sin(x)\right) + \frac{C}{\cos(x)}$ où $C \in \mathbb{R}$ est déterminé à l'aide de la condition $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = 1$.

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \begin{cases} 1 \text{ parce que c'est ce que l'on veut} \\ \dfrac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)}\left(-\dfrac{1}{12}\sin\left(\dfrac{\pi}{3}\right)-\dfrac{3}{4}\sin\left(\dfrac{\pi}{3}\right)\right) + \dfrac{C}{\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)} \text{ d'après l'expression de } f \end{cases}$$

  qui conduit à $\frac{1}{2}+\frac{3}{8}\sqrt{3} = C$, d'où $f : \left|\begin{array}{ccc} \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{\cos(x)}\left(-\dfrac{1}{12}\sin(x)-\dfrac{3}{4}\sin(x)\right) + \dfrac{\frac{1}{2}+\frac{3}{8}\sqrt{3}}{\cos(x)} \end{array}\right.$.