Éléments de réflexion | Pistes de recherche

Les éléments développés ci-après ne sont souvent que des indications pour aboutir à la solution, qui détaillent la plupart du temps un cheminement à suivre pour montrer le rèsultat demandé. La plupart des calculs sont laissés aux lecteurs. . .La mise en forme de certains calculs est faite de sorte à économiser de l'espace et donc du papier, mais il conviendrait de ne pas les écrire en ligne notamment comme cela l'est parfois.

Un peu de technique

EX. 1 | Réf. 4355

Déterminer le rayon de convergence de la série entière de la variable réelle $\sum \frac{n+2}{n(n^2-1)}x^n$, puis en exprimer sa somme sur son intervalle ouvert de convergence à l'aide des fonctions usuelles.

EX. 1 | Éléments de correction | Réf. 4355

Détermination du rayon de convergence : soit $x \in \mathbb{R}^*$. Pour tout entier $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$, on pose $u_n = \left|\frac{n+2}{n(n^2-1)}x^n\right|$.

Il est immédiat que : $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}, \quad u_n > 0.$

Par ailleurs, on a :
$$\begin{aligned} \frac{u_{n+1}}{u_n} &= \left|\frac{n+3}{(n+1)\left((n+1)^2-1\right)} \times \frac{n\left(n^2-1\right)}{n+2} \times x\right| \\ &= \frac{(n+3)(n-1)(n+1)}{n(n+2)^2}|x| \end{aligned}$$

Par suite, puisque $\frac{(n+3)(n-1)(n+1)}{n(n+2)^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^3}{n^3}$ on en déduit que $\frac{(n+3)(n-1)(n+1)}{n(n+2)^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ et par suite que $\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} |x|$.

Ainsi, d'après le critère de d'Alembert pour les séries numériques à termes strictement positifs, on a :

Si $|x| < 1$ **:** la série numérique $\sum u_n$ est convergente. Ainsi, la série numérique $\sum \frac{n+2}{n(n^2-1)}x^n$ est absolument convergente.

Si $|x| > 1$ **:** la série numérique $\sum u_n$ diverge grossièrement, et il en est de même de la série $\sum \frac{n+2}{n(n^2-1)}x^n$.

Ainsi, le rayon de convergence de la série entière de la variable réelle $\sum \frac{n+2}{n(n^2-1)}x^n$ est égal à 1.

Calcul de la somme de la série entière : tout d'abord, on remarque que :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}, \quad \frac{n+2}{n(n^2-1)} &= \frac{1}{n^2-1} + \frac{2}{n(n^2-1)} \\ &= \frac{1}{(n-1)(n+1)} + \frac{2}{n(n-1)(n+1} \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}\right) - \frac{2}{n} + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n+1} \\ &= -\frac{2}{n} + \frac{1}{2}\frac{1}{n+1} + \frac{3}{2}\frac{1}{n-1} \end{aligned}$$

Sur le même principe que précédement, on pourrait montrer que les deux séries entières de la variable réelle $\sum \frac{1}{n+1}x^n$ et $\sum \frac{1}{n-1}x^n$ sont de rayon de convergence égal à 1.

De plus, on sait que : $\forall x \in]-1;1[, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}x^n = -\ln(1-x).$

Il vient alors : $\forall x \in]-1;1[,\quad \displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n+2}{n\left(n^2-1\right)} x^n = -2\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n}x^n + \frac{1}{2}\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n+1}x^n + \frac{3}{2}\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n-1}x^n$

$$= -2\left(\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}x^n\right) - \frac{1}{1}x^1\right) + \frac{1}{2}\sum_{n=3}^{+\infty}\frac{1}{n}x^{n-1} + \frac{3}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}x^{n+1}$$

$$= -2\left(-\ln(1-x) - x\right) + \frac{3x}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}x^n + \frac{1}{2}\sum_{n=3}^{+\infty}\frac{1}{n}x^{n-1}$$

$$= -2\left(-\ln(1-x) - x\right) - \frac{3x}{2}\ln(1-x) + \frac{1}{2}\sum_{n=3}^{+\infty}\frac{1}{n}x^{n-1}$$

Ainsi : $\forall x \in]-1;1[\setminus\{0\},\quad \displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n+2}{n\left(n^2-1\right)} x^n = 2\ln(1-x) + 2x - \frac{3x}{2}\ln(1-x) + \frac{1}{2x}\sum_{n=3}^{+\infty}\frac{1}{n}x^n$

$$= 2\ln(1-x) + 2x - \frac{3x}{2}\ln(1-x) + \frac{1}{2x}\left(\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}x^n\right) - \frac{1}{1}x^1 - \frac{1}{2}x^2\right)$$

$$= 2\ln(1-x) + 2x - \frac{3x}{2}\ln(1-x) + \frac{1}{2x}\left(-\ln(1-x) - \frac{1}{1}x^1 - \frac{1}{2}x^2\right)$$

$$= 2\ln(1-x) + 2x - \frac{3x}{2}\ln(1-x) - \frac{1}{2x}\ln(1-x) - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}x$$

$$= \left(2 - \frac{3}{2}x - \frac{1}{2x}\right)\ln(1-x) + \frac{7}{4}x - \frac{1}{2}$$

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

EX. 2 | Réf. 4432

1. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\displaystyle\sum \frac{n!}{1\times 3\times \ldots \times (2n+1)} x^{2n+1}$.

2. En notant R le rayon de convergence de cette série et S sa somme sur $]-R;R[$, montrer que S est solution de l'équation différentielle (E) suivante :

$$(\star) :\quad \left(x^2-2\right)y' + xy + 2 = 0$$

3. Résoudre cette équation différentielle et en déduire l'expression de S sur $]-R;R[$.

EX. 2 | Éléments de correction | Réf. 4432