Éléments de réflexion | Pistes de recherche

Les éléments développés ci-après ne sont souvent que des indications pour aboutir à la solution, qui détaillent la plupart du temps un cheminement à suivre pour montrer le rèsultat demandé. La plupart des calculs sont laissés aux lecteurs...La mise en forme de certains calculs est faite de sorte à économiser de l'espace et donc du papier, mais il conviendrait de ne pas les écrire en ligne notamment comme cela l'est parfois.

Je m'entraîne à rédiger

EX. 1 | Réf. 4355

Déterminer le rayon de convergence de la série entière de la variable réelle $\sum \frac{n+2}{n(n^2-1)}x^n$, puis en exprimer sa somme sur son intervalle ouvert de convergence à l'aide des fonctions usuelles.

EX. 1 | Éléments de correction | Réf. 4355

Détermination du rayon de convergence : soit $x \in \mathbb{R}^*$. Pour tout entier $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$, on pose $u_n = \left|\frac{n+2}{n(n^2-1)}x^n\right|$.

Il est immédiat que : $\quad \forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\}, \quad u_n > 0.$

Par ailleurs, on a :
$$\begin{aligned} \frac{u_{n+1}}{u_n} &= \left|\frac{n+3}{(n+1)\left((n+1)^2-1\right)} \times \frac{n\left(n^2-1\right)}{n+2} \times x\right| \\ &= \frac{(n+3)(n-1)(n+1)}{n(n+2)^2}\,|x| \end{aligned}$$

Par suite, puisque $\frac{(n+3)(n-1)(n+1)}{n(n+2)^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^3}{n^3}$ on en déduit que $\frac{(n+3)(n-1)(n+1)}{n(n+2)^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ et par suite que $\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} |x|$.

Ainsi, d'après le critère de d'Alembert pour les séries numériques à termes strictement positifs, on a :

Si $|x|<1$: la série numérique $\sum u_n$ est convergente. Ainsi, la série numérique $\sum \frac{n+2}{n(n^2-1)}x^n$ est absolument convergente.

Si $|x|>1$: la série numérique $\sum u_n$ diverge grossièrement, et il en est de même de la série $\sum \frac{n+2}{n(n^2-1)}x^n$.

Ainsi, le rayon de convergence de la série entière de la variable réelle $\sum \frac{n+2}{n(n^2-1)}x^n$ est égal à 1.

Calcul de la somme de la série entière : tout d'abord, on remarque que :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\}, \quad \frac{n+2}{n(n^2-1)} &= \frac{1}{n^2-1} + \frac{2}{n(n^2-1)} \\ &= \frac{1}{(n-1)(n+1)} + \frac{2}{n(n-1)(n+1} \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}\right) - \frac{2}{n} + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n+1} \\ &= -\frac{2}{n} + \frac{1}{2}\frac{1}{n+1} + \frac{3}{2}\frac{1}{n-1} \end{aligned}$$

Sur le même principe que précédement, on pourrait montrer que les deux séries entières de la variable réelle $\sum \frac{1}{n+1}x^n$ et $\sum \frac{1}{n-1}x^n$ sont de rayon de convergence égal à 1.

De plus, on sait que : $\quad \forall x \in \,]-1;1[\,, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}x^n = -\ln(1-x).$

Il vient alors : $\forall x \in]-1;1[\,,\quad \displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n+2}{n\left(n^2-1\right)} x^n$

$$\begin{aligned}
&= -2\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n}x^n + \frac{1}{2}\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n+1}x^n + \frac{3}{2}\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n-1}x^n\\
&= -2\left(\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}x^n\right) - \frac{1}{1}x^1\right) + \frac{1}{2}\sum_{n=3}^{+\infty}\frac{1}{n}x^{n-1} + \frac{3}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}x^{n+1}\\
&= -2\left(-\ln(1-x)-x\right) + \frac{3x}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}x^n + \frac{1}{2}\sum_{n=3}^{+\infty}\frac{1}{n}x^{n-1}\\
&= -2\left(-\ln(1-x)-x\right) - \frac{3x}{2}\ln(1-x) + \frac{1}{2}\sum_{n=3}^{+\infty}\frac{1}{n}x^{n-1}
\end{aligned}$$

Ainsi : $\forall x \in]-1;1[\setminus \{0\}\,,\quad \displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n+2}{n\left(n^2-1\right)} x^n$

$$\begin{aligned}
&= 2\ln(1-x) + 2x - \frac{3x}{2}\ln(1-x) + \frac{1}{2x}\sum_{n=3}^{+\infty}\frac{1}{n}x^n\\
&= 2\ln(1-x) + 2x - \frac{3x}{2}\ln(1-x) + \frac{1}{2x}\left(\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}x^n\right) - \frac{1}{1}x^1 - \frac{1}{2}x^2\right)\\
&= 2\ln(1-x) + 2x - \frac{3x}{2}\ln(1-x) + \frac{1}{2x}\left(-\ln(1-x) - \frac{1}{1}x^1 - \frac{1}{2}x^2\right)\\
&= 2\ln(1-x) + 2x - \frac{3x}{2}\ln(1-x) - \frac{1}{2x}\ln(1-x) - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}x\\
&= \left(2 - \frac{3}{2}x - \frac{1}{2x}\right)\ln(1-x) + \frac{7}{4}x - \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

EX. 2 | Réf. 4354

L'objet de ce problème consiste en l'étude de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$(\star) : \quad \begin{cases} u_0 \in]0;1[\\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 - u_n + 1} \end{cases}$$

Dans tout ce problème, f désignera la fonction $f : x \longmapsto \sqrt{x^2 - x + 1}$.

1. Vérifier que : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad x^2 - x + 1 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$.
2. En déduire le domaine de définition de f, et justifer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est bien défini.
3. À l'aide de la première question, montrer que : $\forall x \in [0;1]\,, \quad f(x) \in [0;1]$.
4. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \in [0;1]$.
5. Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, calculer $f'(x)$.
6. Dresser le tableau des variations de f sur $[0;1]$.
7. Montrer que : $\forall x \in [0;1]\,, \quad f(x) \geq x$.
8. Montrer que : $\forall x \in [0;1]\,, \quad |f'(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$
9. Calculer $f(1)$.
10. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad |1 - u_{n+1}| \leq \frac{1}{\sqrt{3}}|1 - u_n|$
11. En déduire alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une majoration de $|1 - u_n|$ en fonction de n et de $|1 - u_0|$.
12. En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.

EX. 2 | Éléments de correction | Réf. 4354

1. Un développement de l'expression proposée donne directement que : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} = x^2 - x + \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = x^2 - x + 1$

2. On a donc : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \underbrace{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}_{\geq 0} + \underbrace{\frac{3}{4}}_{\geq 0} \geq 0$

Par conséquent, le domaine de définition de la fonction f est $\mathbb{R}$.
Montrons par récurrence sur l'entier n que u_n est bien défini.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $\mathcal{P}(n)$:« u_n est bien défini »
Montrons par récurrence sur l'entier n que la proposition $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier n.

Initialisation : l'entier u_0 est par définition un réel de $[0;1]$, donc il est bien défini. Ainsi $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que l'on a $\mathcal{P}(n)$, c'est à dire que u_n est bien défini. Montrons, sous cette hypothèse, que l'on a $\mathcal{P}(n+1)$, c'est à dire que u_{n+1} est bien défini.
Par hypothèse de récurrence, u_n existe et appartient à $\mathbb{R}$. Ainsi d'après la question précédente, $u_n^2 - u_n + 1 \geq 0$ et par suite la quantité $\sqrt{u_n^2 - u_n + 1}$ est bien définie, c'est à dire que u_{n+1} est bien défini, ce qui est $\mathcal{P}(n+1)$.

Conclusion : la proposition $\mathcal{P}(n)$ étant vraie au rang 0 et héréditaire, d'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout entier n.

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est bien définie, et la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aussi.

3. Soit $x \in [0;1]$. On a alors : $-\frac{1}{2} \leq x - \frac{1}{2} \leq \frac{1}{2}$

donc : $0 \leq \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 \leq \frac{1}{4}$

et ainsi : $0 \leq \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 \leq \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \leq \frac{1}{4} + \frac{3}{4}$

ce qui donne : $\quad 0 \leq \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \leq 1$

pour en déduire que : $\quad 0 \leq x^2 - x + 1 \leq 1$
Finalement : $\quad 0 \leq \sqrt{x^2-x+1} \leq \sqrt{1}$ par croissance de la fonction racine.
En conclusion : $\quad \forall x \in [0;1], \quad 0 \leq f(x) \leq 1$

4. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on pose $\mathcal{P}(n)$: ´ $u_n \in [0;1]$ ˘
Montrons par récurrence sur l'entier n que la proposition $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Initialisation : par définition $u_0 \in [0;1]$, donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que l'on a $\mathcal{P}(n)$, c'est à dire que $u_n \in [0;1]$. Montrons, sous cette hypothèse, que l'on a $\mathcal{P}(n+1)$, c'est à dire $u_{n+1} \in [0;1]$.
Puisque $u_n \in [0;1]$ par hypothèse de récurrence, d'après la question précédente, $f(u_n) \in [0;1]$, c'est à dire que $\sqrt{u_n^2 - u_n + 1} \in [0;1]$, ce qui donne $u_{n+1} \in [0;1]$ et on a bien $\mathcal{P}(n+1)$.

Conclusion : la proposition $\mathcal{P}(n)$ étant vraie au rang 0 et héréditaire, par le principe de récurrence, elle est vraie pour tout entier n.

Ainsi, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ on a $u_n \in [0;1]$.

5. On a : $\quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$

Par suite, la fonction $x \longmapsto x^2 - x + 1$ est positive strictement et dérivable sur $\mathbb{R}$. Par composition avec la fonction $x \longmapsto \sqrt{x}$, la fonction $x \longmapsto f(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.
On a alors : $\quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = \dfrac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x+1}}$

6. On a clairement que : $\quad 2x - 1 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x > \frac{1}{2} \qquad$ et $\qquad 2x - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{1}{2}$
Le signe de l'expression $f'(x)$ étant donné par celui de $2x-1$, on en déduit le tableau de variation de f sur l'intervalle $[0;1]$.

x	0		$\frac{1}{2}$		1
Signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	
Variations de f	1	$\searrow$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\nearrow$	1

7. On a : $\left(f(x) \geq x\right) \Leftrightarrow \left(\sqrt{x^2-x+1} - x \geq 0\right)$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{\left(\sqrt{x^2-x+1}-x\right)\left(\sqrt{x^2-x+1}+1\right)}{\sqrt{x^2-x+1}+x} \geq 0\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{x^2-x+1-x^2}{\sqrt{x^2-x+1}+x} \geq 0\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(,\frac{1-x}{\sqrt{x^2-x+1}+x} \geq 0\right)$$

Puisque pour tout $x \in [0;1]$, $1-x \geq 0$, le signe de l'expression $\dfrac{x^2+1}{\sqrt{x^2-x+1}+x}$ est exactement celui de son dénominateur qui est clairement positif sur l'intervalle $[0;1]$.
Par suite, on en déduit que : $\forall x \in [0;1]\,, \quad f(x) \geq x$.

8. On a montré précédemment que : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = \dfrac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x+1}}$

D'après le tableau de variation de f sur $[0;1]$, on a : $\forall x \in [0;1]\,, \quad \dfrac{\sqrt{3}}{2} \leq \sqrt{x^2-x+1} \leq 1$

Donc par pasage à l'inverse il vient que : $\forall x \in [0;1]\,, \quad 0 < 1 \leq \dfrac{1}{\sqrt{x^2-x+1}} \leq \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

On en déduit ainsi que : $\forall x \in]0;1[\,, \quad 0 < \dfrac{1}{2} \leq \dfrac{1}{2\sqrt{x^2-x+1}} \leq \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

Par suite, il vient que : $\forall x \in [0;1]\,, \quad \left|\dfrac{1}{2\sqrt{x^2-x+1}}\right| \leq \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

et donc que : $\forall x \in [0;1]\,, \quad |f'(x)| \leq \dfrac{|2x-1|}{\sqrt{3}}$

La fonction $x \longmapsto 2x-1$ étant strictement croissante sur l'intervalle $[0;1]$ avec pour minimum -1 et maximum 1, on en déduit que :

$$\forall x \in [0;1]\,, \quad |2x-1| \leq 1.$$

Finalement il vient que : $\forall x \in [0;1]\,, \quad |f'(x)| \leq \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

9. On a directement que $f(1) = 1$.

10. La fonction f étant continue sur l'intervalle $[0;1]$ et dérivable sur cet intervalle avec : $\forall x \in [0;1]\,, \quad |f'(x)| \leq \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

d'après le théorème des accroissements finis, on a : $\forall\,(x_1,x_2) \in [0;1]\times[0;1]\,, \quad |f(x_1) - f(x_2)| \leq \dfrac{1}{\sqrt{3}}\,|x_1 - x_2|$

En particulier, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a : $|f(1) - f(u_n)| \leq \dfrac{1}{\sqrt{3}}\,|1-u_n|$ c'est à dire $|1-u_{n+1}| \leq \dfrac{1}{\sqrt{3}}\,|u_n - 1|$.

11. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on pose $\mathcal{P}(n)$: ´ $|1-u_n| \leq \left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^n |1-u_0|$ ˇ

Montrons par récurrence sur l'entier n que la proposition $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier n.

Initialisation : on a $|1-u_0| \leq 1\,|1-u_0|$ et comme $\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^0 = 1$, il vient bien que $|1-u_0| \leq \left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^0 |1-u_0|$ ce qui est $\mathcal{P}(0)$.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que l'on a $\mathcal{P}(n)$, c'est à dire que $|1-u_n| \leq \left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^n |1-u_0|$ et montrons sous cette hypothèse, que l'on a $\mathcal{P}(n+1)$ c'est à dire $|1-u_{n+1}| \leq \left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^{n+1} |1-u_0|$.

On sait que : $|1-u_{n+1}| \leq \dfrac{1}{\sqrt{3}}\,|1-u_n|$.

Or par hypothèse de récurrence, on a : $|1-u_n| \leq \left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^n |1-u_0|$.

Par suite, il vient que : $|1-u_{n+1}| \leq \dfrac{1}{\sqrt{3}} \times \left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^n |1-u_0|$

c'est à dire que : $|1-u_{n+1}| \leq \left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^{n+1} |1-u_0|$ ce qui est bien $\mathcal{P}(n+1)$.

Conclusion : la proposition $\mathcal{P}(n)$ étant vraie au rang 0 et héréditaire, d'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout entier n.

12. Puisque $\left|\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right| < 1$, on a que $\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Ainsi, d'après le théorème d'encadrement des limites, il vient que $|1-u_n| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, c'est à dire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 1.

Pour s'occuper les jours de pluies

EX. 3 | Réf. 1578

1. Justifier la convergence de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} P(t)\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t$ pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$.

On admet que l'application φ définie par $\varphi(P,Q) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} P(t)Q(t)\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.

2. Soient $h : x \longmapsto \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$ et pour $n \in \mathbb{N}$, $H_n : x \longmapsto (-1)^n \mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}} h^{(n)}(x)$.

- **a.** Trouver une relation entre H_{n+1}, H_n et H_n'.
- **b.** Montrer que H_n est un polynôme de degré n.
  Les polynômes H_n sont appelés les polynômes de Hermite.
- **c.** Montrer que :
  $$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad H_{n+1} = XH_n + nH_{n-1}$$
  et en déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad H_n' = nH_{n-1}$.
- **d.** Montrer que : $\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} H_k(t)\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t = 0$.

3. Montrer que les polynômes d'Hermite sont orthogonaux pour le produit scalaire défini précédemment.

EX. 3 | Éléments de correction | Réf. 1578

1. La fonction $\psi : t \longmapsto P(t)\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et si on pose $P(t) = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} a_i t^i$ avec $a_n \neq 0$, on a $|\psi(t)| \underset{t\to+\infty}{\sim} |a_n|\, t^n \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}$ donc $t^2\,|\psi(t)| \underset{t\to+\infty}{\sim} |a_n|\, t^{n+2}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}$, et ainsi $|\psi(t)| \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$, et la convergence de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$ assure par le théorème de comparaison, la convergence absolue, et donc la convergence de $\displaystyle\int_1^{+\infty} P(t)\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}$ et par suite celle de $\displaystyle\int_0^{+\infty} P(t)\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t$.

On raisonne de manière identique pour montrer que $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} P(t)\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t$ converge, et par suite on aura la convergence de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} P(t)\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t$.

2.
- **a.** Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, $H_n(x) = (-1)^{\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}} h^{(n)}(x)$, donc en dérivant, on obtient $H_n'(x) = (-1)^n\left(x\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}h^{(n)}(x) + \mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}h^{(n+1)}(x)\right)$ et $H_n''(x) = x \times (-1)^n \mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}} h^{(n)}(x) - (-1)^{n+1}\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}h^{(n+1)}(x) = xH_n(x) - H_{n+1}(x)$ ce qui est bien ce que l'on cherchait.
- **b.** On raisonne par récurrence sur n. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère ´ $\mathcal{P}(n) : \deg H_n = n$ ˇ.
  - Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $H_0(x) = (-1)^0\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}h(x) = (-1)^0\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} = 1$ et donc $H_0 = 1$ et on a $\deg H_0 = 0$, et la propriété $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
  - Supposons que l'on ait la propriété $\mathcal{P}(n)$ pour un entier n donné, et montrons que, sous cette hyptohèse, on a la propriété $\mathcal{P}(n+1)$.
    Si $n = 0$, $H_n' = 0$ et par suite de la relation $H_{n+1} = XH_n - H_n'$, on en déduit que $\deg H_{n+1} = \deg(H_n) + 1 = n+1$, d'où l'on a bien $\mathcal{P}(n+1)$ dans ce cas.
    Si $n > 0$, alors $\deg(H_n') = n-1$, et donc par opérations sur les degrés, la relation $H_{n+1} = XH_n - H_n'$ donne encore ici que $\deg(H_{n+1}) = \max(\deg(XH_n), H_n') = n+1$ d'où l'on a bien encore $\mathcal{P}(n+1)$.
  - La propriété $\mathbb{P}(n)$ étant vraie au rang 0 et héréditaire, elle est donc vraie pour tout entier n.
- **c.** Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $h'(x) = -x\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} = -xh(x)$, donc en utilisant la formule de Leibniz, on obtient pour $n \geq 1$

et pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$h^{(n+1)}(x) = (h')^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-x)^{(k)} h^{(n-k)}(x) = (-x)h^{(n)}(x) + (-n)h^{(n-1)}(x)$$

où $(-x)^{(k)}$ est une écriture (abusive) qui désigne la dérivée k^{e} de la fonction $x \longmapsto -x$.
Donc en multipliant par $(-1)^{n+1}\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}$ les deux membres de cette égalité, on a $H_{n+1}(x) = xH_n(x) - nH_{n-1}(x)$, d'où l'égalité polynomiale voulue, et comme $H_{n+1} = XH_n - H_n'$, il vient $H_n' = nH_{n-1}$ pour $n \geq 1$.

d. Soit $k \in \mathbb{N}^*$ et $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$.

$$\begin{aligned}
\int_a^b H_k(t)\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t &= \int_a^b (-1)^k \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}} h^{(k)} \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_a^b (-1)^k h^{(k)}(t)\,\mathrm{d}t \\
&= (-1)^k \left[h^{(k-1)}(t)\right]_a^b \\
&= (-1)^k \left[(-1)^{k-1}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}} H_{k-1}(t)\right]_a^b \\
&= \mathrm{e}^{-\frac{a^2}{2}} H_{k-1}(a) - \mathrm{e}^{-\frac{b^2}{2}} H_{k-1}(b)
\end{aligned}$$

Comme H_{k-1} est une fonction polynôme, on a : $\lim\limits_{b \to +\infty} \mathrm{e}^{-\frac{b^2}{2}} H_{k-1}(b) = 0$ et $\dim_{a \to -\infty} \mathrm{e}^{-\frac{a^2}{2}} H_{k-1}(x) = 0$. On en déduit, en faisant tendre a vers $-\infty$ et b vers $+\infty$ en ayant au préalable scindé l'intégrale en 2 intégrales avec une seule borne impropre que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} H_k(t)\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t$ converge et qu'elle est nulle.

3. Soient $(i,j) \in (\mathbb{N}^*)^2$ avec $i \neq j$, et supposons par exemple que $i > j$. Alors :

$$\langle H_i \,|H_j\,\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} H_i(t)H_j(t)\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} H_i(t)(-1)^j(t)\,\mathrm{d}t$$

Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < v$ et posons $I(a,b) = \displaystyle\int_a^b H_i(t)(-1)jh^{(j)}(t)\,\mathrm{d}t$ et effectuons une intégration par parties :

$$\begin{array}{lcl}
u(t) = H_i(t) & \underset{\text{se dérive en}}{\rightsquigarrow} & u'(t) = iH_{i-1}(t) \\
v(t) = (-1)^j h^{(j)}(t) & \underset{\text{se dérive en}}{\rightsquigarrow} & v'(t) = (-1)^j h^{(j-1)}(t)
\end{array}$$

les deux fonctions u et v étant de classe $\mathcal{C}^1$sur $[a;b]$. On obtient alors :

$$\begin{aligned}
I(a,b) &= \left[(-1)^j h^{(j-1)}(t)H_i(t)\right]_a^b - i\int_a^b H_{i-1}(t)(-1)^j h^{(j-1)}(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \left[-H_i(t)H_{j-1}(t)\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\right]_a^b + i\int_a^b H_{i-1}(t)H_{j-1}(t)\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

Comme $\dim_{t \to +\infty} H_i(t)H_{j-1}(t)\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}} = \lim\limits_{t \to -\infty} H_i(t)H_{j-1}(t)\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}} = 0$, en faisant tendre a vers $-\infty$ et b vers $+\infty$ et en ayant au préalable coupé l'intégrale en deux intégrales à une seule borne impropre, on en déduit que $\langle H_i \,|H_j\,\rangle = i\,\langle H_{i-1} \,|H_{j-1}\,\rangle$, ce qui donne par itérations successives :

$$\langle H_i \,|H_j\,\rangle = i(i-1)\ldots(i-j+1)\,\langle H_{i-j} \,|H_0\,\rangle$$

Or d'après la question **(3)(d)** comme $i - j \geq 1$, $\langle H_{i-j} \,|H_0\,\rangle = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} H_{i-j}(t)\mathrm{e}^{\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t = 0$.

En conclusion, on a prouvé que pour tout $(i,j) \in \mathbb{N}^*$, avec $i \neq j$, $\langle H_i \,|H_j\,\rangle = 0$.
Toujours d'après la question **(3)(d)**, pour $j \geq 1$, $\langle H_0 \,|H_j\,\rangle = 0$. Ainsi la famille $(H_j)_{0 \leq j \leq n}$ est une famille orthogonale de $\mathbb{R}_n[X]$.
Composée de $n+1$ polynômes non nuls, $(H_j)_{0 \leq j \leq n}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$, donc finalement est une base orthogonale de $\mathbb{R}_n[X]$.