> **À noter & À garder en tête**
>
> Les éléments développés ci-après ne sont souvent que des indications pour aboutir à la solution, qui détaillent la plupart du temps un cheminement à suivre pour montrer le rèsultat demandé. La plupart des calculs sont laissés aux lecteurs. . .La mise en forme de certains calculs est faite de sorte à économiser de l'espace et donc du papier, mais il conviendrait de ne pas les écrire en ligne notamment comme cela l'est parfois.

Un peu de technique

Exercice| [1102] | 1| Intégrales généralisées

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 \sqrt{x}\,(\ln(x))^n \,\mathrm{d}x$.

(1). Établir la convergence de I_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(2). Établir une relation entre I_{n+1} et I_n, pour $n \in \mathbb{N}$.

(3). Déterminer l'expression de I_n en fonction de n.

(4). Montrer la convergence de la série de terme général $\dfrac{1}{I_n}$ et calculer la somme de cette série.

Éléments de correction

(1). La fonction $f : x \longmapsto \sqrt{x}\,(\ln(x))^n$ est continue sur $]0;1]$.

Par suite $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ est un intégrale impropre en sa borne 0.

Or on sait par croissance comparée que : $\sqrt{x}\,(\ln(x))^n \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$

La fonction f est donc prolongeable par continuité en 0 par $f(0) = 0$, et par suite, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ est faussement impropre en 0 et donc convergente.

(2). Soit $a \in\,]0;1]$.

Dans l'intégrale $\displaystyle\int_a^1 \sqrt{x}\,(\ln(x))^{n+1} \,\mathrm{d}x$, on effecue l'intégration par parties suivante :

$$\begin{array}{lcl} u(x) = (\ln(x))^{n+1} & \underset{\text{se dérive en}}{\rightsquigarrow} & u'(x) = (n+1)\dfrac{(\ln(x))^n}{x} \\ v(x) = \dfrac{2}{3}x\sqrt{x} & \underset{\text{se dérive en}}{\rightsquigarrow} & v'(x) = \sqrt{x} \end{array}$$

on obtient :

$$\begin{aligned} \underbrace{\int_a^1 \sqrt{x}\,(\ln(x))^{n+1} \,\mathrm{d}x}_{\underset{a\to 0}{\longrightarrow} I_{n+1}} &= \left[\frac{2x\sqrt{x}\,(\ln(x))^{n+1}}{3}\right]_a^1 - \frac{2(n+1)}{3}\int_a^1 \sqrt{x}\,(\ln(x))^n \,\mathrm{d}x \\ &= \underbrace{-\frac{2}{3}a\sqrt{a}\,(\ln(a))^{n+1}}_{\underset{a\to 0}{\longrightarrow} 0} - \frac{2(n+1)}{3}\underbrace{\int_a^1 \sqrt{x}\,(\ln(x))^n \,\mathrm{d}x}_{\underset{a\to 0}{\longrightarrow} I_n} \end{aligned}$$

ce qui donne que : $I_{n+1} = -\dfrac{2(n+1)}{3} I_n$

(3). La relation précédente permet de conjecturer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ I_n = (-1)^n \left(\dfrac{2}{3}\right)^n n! I_0$.

Avec $I_0 = \displaystyle\int_0^1 \sqrt{x}\,\mathrm{d}x$ qui vaut par intégration directe $\dfrac{2}{3}$, on aurait : $\forall n \in \mathbb{N},\ I_n = (-1)^n \left(\dfrac{2}{3}\right)^{n+1} n!$.

(4). Il est direct que : $\forall n \in \mathbb{N},\ \dfrac{1}{I_n} = \dfrac{3}{2} \times \dfrac{\left(-\dfrac{3}{2}\right)^n}{n!}$

Par suite, les séries $\sum \frac{1}{I_n}$ et $\sum \frac{\left(-\frac{3}{2}\right)^n}{n!}$ sont de même nature. Cette dernière est clairement une série exponentielle, donc convergente, de somme $\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}}$.

Par suite $\sum \frac{1}{I_n}$ est convergente, et on a de plus : $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{I_n} = \frac{3}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(-\frac{3}{2}\right)^n}{n!}$.

Ainsi, on a : $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{I_n} = \frac{3}{2} \mathrm{e}^{-\frac{3}{2}}$.

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

Exercice| [5172] | 2| Étude d'un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[x]$

Soient $a \in \mathbb{R}$ et φ l'application donnée par :

$$\varphi : \left| \begin{array}{ccl} \mathbb{R}_n[x] & \longrightarrow & \mathbb{R}[x] \\ P & \longmapsto & (x-a)\left(P'(x)+P'(a)\right) - 2\left(P(x)-P(a)\right) \end{array} \right.$$

(1). Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[x]$.

(2). Calculer $(\varphi(P))''$ pour tout $P \in \mathbb{R}_n[x]$. En déduire que $\dim(\operatorname{Ker}(\varphi)) \leq 3$.

(3). Démontrer que $\varphi(P)$ est divisible par $(x-a)^3$ pour tout $P \in \mathbb{R}_n[x]$.

(4). En déduire $\operatorname{Im}(\varphi)$ et $\operatorname{Ker}(\varphi)$.

Éléments de correction

(1). Caractère linéaire de φ : on considère : $\left\{ \begin{array}{ccc} P & \in & \mathbb{R}_n[x] \\ Q & \in & \mathbb{R}_n[x] \\ \lambda & \in & \mathbb{R} \end{array} \right.$

On pose $R = \lambda P + Q$ et montrons que $\varphi(\lambda P + Q) = \lambda\varphi(P) + \varphi(Q)$.

Par définition on a : $\varphi(R) = (x-a)\left(R'(x)+R'(a)\right) - 2\left(R(x)-R(a)\right)$

Il est immédiat que : $R(x) = \lambda P(x) + Q(x)$ et $R'(x) = \lambda P'(x) + Q'(x)$

De mêmen on a : $R(a) = \lambda P(a) + Q(a)$ et $R'(a) = \lambda P'(a) + Q(a)$.

On en déduit donc que :

$$\begin{aligned} \varphi(R) &= (x-a)\left(\lambda P'(x)+Q'(x)+\lambda P'(a)+Q(a)\right) \\ &\quad -2\left(\lambda P(x)+Q(x)-(\lambda P(a)+Q(a))\right) \\ &= (x-a)\left(\lambda P'(x)+\lambda P'(a)\right)+(x-a)\left(Q'(x)+Q'(a)\right) \\ &\quad -2\left(\lambda P(x)-\lambda P(a)\right)-2\left(Q(x)-Q(a)\right) \\ &= \lambda(x-a)\left(P'(x)+P'(a)\right)-2\lambda\left(P(x)-P(a)\right) \\ &\quad \underbrace{(x-a)\left(Q(x)+Q(a)\right)-2\left(Q(x)-Q(a)\right)}_{=\varphi(Q)(x)} \\ &= \lambda\left((x-a)\left(P'(x)+P'(a)\right)-2\left(P(x)-P(a)\right)\right)+\varphi(Q)(x) \\ &= \lambda\varphi(P)(x)+\varphi(Q)(x) \end{aligned}$$

et ainsi φ est linéaire.

Image de $\mathbb{R}_n[x]$ par φ : pour $P \in \mathbb{R}_n[x]$, par opération sur les degrés, on a :

$$\underbrace{\underbrace{\underbrace{(x-a)}_{\deg=1}\underbrace{\left(P'(x)+P'(a)\right)}_{\deg\leq n-1}}_{\deg\leq n} - 2\underbrace{\left(P(x)-P(a)\right)}_{\deg\leq n}}_{\deg\leq n}$$

ce qui assure que $\varphi(P) \in \mathbb{R}_n[x]$ et donc que $\varphi : \mathbb{R}_n[x] \longrightarrow \mathbb{R}_n[x]$.

Conclusion : on a bien $\varphi : \mathbb{R}_n[x] \longrightarrow \mathbb{R}_n[x]$ et φ linéaire, donc φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[x]$.

(2). Calcul de $(\varphi(P))''$: Il est immédiat que la fonction $\varphi(P)$ est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ car polynomiale.

Un calcul direct donne que :
$$\begin{aligned}(\varphi(P))'(x) &= P'(x)+P(a)+(x-a)\,P''(x)-2P'(x)\\ &= (x-a)\,P''(x)-P'(x)+P(a)\\ (\varphi(P))''(x) &= P''(x)+(x-a)P'''(x)-P''(x)\\ &= (x-a)P'''(x)\end{aligned}$$

Dimension de $\mathrm{Ker}\,(\varphi)$ **:** soit $P \in \mathrm{Ker}\,(\varphi)$. Par définition on a $\varphi(P)=\tilde{0}$, ce qui donne en dérivant deux fois que $(\varphi(P))''=\tilde{0}$, et compte-tenu du calcul précédent que : $(x-a)\,P'''(x)=\tilde{0}$.

On en déduit donc que : $\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}\,,\ P'''(x)=0$.

Par suite, P''' est un polynôme qui possède une infinité de racines donc par théorème, est le polynôme nul.

Ainsi, P'' est nécessairement un polynôme de degré au plus 0, P' un polynôme de degré au plus 1, et donc P est au plus de degré au plus 2.

Cela se traduit par $\mathrm{Ker}\,(\varphi)\subset\mathbb{R}_2[x]$, et comme $\dim(\mathbb{R}_2[x])=3$, on en déduit que $\dim(\mathrm{Ker}\,(\varphi))\leq 3$.

(3). Un calcul direct donne que : $\left\{\begin{array}{rcl}\varphi(P)(a) &=& 0\\ (\varphi(P))'(a) &=& 0\\ (\varphi(P))''(a) &=& 0\end{array}\right.$

Ainsi, a est une racine de multiplicité au moins égale à 3 de $\varphi(P)$ ce qui assure que ce dernier est divisible par $(x-a)^3$.

(4). Identification de $\mathrm{Im}\,(\varphi)$ **:** d'après la question précédente, on a : $\mathrm{Im}\,(\varphi)\subset\left\{(x-a)^3\,Q,\ Q\in\mathbb{R}_{n-3}[x]\right\}$.

Il est immédiat que : $\left\{(x-a)^3\,Q,\ Q\in\mathbb{R}_{n-3}[x]\right\}=\mathrm{Vect}\,\left((x-a)^3,(x-a)^3x,(x-a)^3x^2,\ldots,(x-a)^3x^{n-3}\right)$.

La famille $\left\{(x-a)^3,(x-a)^3x,(x-a)^3x^2,\ldots,(x-a)^3x^{n-3}\right\}$ est une famille de polynôme de degré échelonnée, donc par théorème est une famille libre, par suite comme elle est génératrice, est une base de $\left\{(x-a)^3\,Q,\ Q\in\mathbb{R}_{n-3}[x]\right\}$, ce dernier étant alors de dimension égale au nombre de vecteurs de cette famille, c'est à dire $n-2$.

On en déduit donc que $\mathrm{rg}\,(\varphi)\leq n-2$.

Supposons que $\mathrm{rg}\,(\varphi)\leq n-1$. D'après le théorème du rang, on aura : $n+1=\mathrm{rg}\,(\varphi)+\dim(\mathrm{Ker}\,(\varphi))$

Ainsi, on a : $\dim(\mathrm{Ker}\,(\varphi))=n+1-\mathrm{rg}\,(\varphi)>\underbrace{n+1-(n-2)}_{=3}$

ce qui est impossible d'après les questions précédentes.

On en déduit donc que $\mathrm{rg}\,(\varphi)=n-2$, ce qui assure que $\mathrm{Im}\,(\varphi)=\mathrm{Vect}\,\left((x-a)^3\,Q,\ Q\in\mathbb{R}_{n-3}[x]\right)$.

Identification de $\mathrm{Ker}\,(\varphi)$ **:** Il vient alors que $\dim(\mathrm{Ker}\,(\varphi))=3$ et donc que $\mathrm{Ker}\,(\varphi)=\mathbb{R}_2[x]$.