À noter & À garder en tête

Les éléments développés ci-après ne sont souvent que des indications pour aboutir à la solution, qui détaillent la plupart du temps un cheminement à suivre pour montrer le rèsultat demandé. La plupart des calculs sont laissés aux lecteurs. . .La mise en forme de certains calculs est faite de sorte à économiser de l'espace et donc du papier, mais il conviendrait de ne pas les écrire en ligne notamment comme cela l'est parfois.

Un peu de technique

Exercice| [4998] | 1| Si c'est sur Twitter, c'est que c'est vrai. . .non ?

Tout est dans le titre de l'exercice. . .

Affirmation A

$$\ln(2+2) = \ln(2) + \ln(2)$$

Affirmation B

$$\ln\left(3+\frac{3}{2}\right) = \ln(3) + \ln\left(\frac{3}{2}\right)$$

Affirmation C

$$\ln\left(4+\frac{4}{3}\right) = \ln(4) + \ln\left(\frac{4}{3}\right)$$

Affirmation D

$$\ln\left(5+\frac{5}{4}\right) = \ln(5) + \ln\left(\frac{5}{4}\right)$$

Affirmation E

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\},\ x + \frac{x}{x-1} = x \times \frac{x}{x-1}$$

Éléments de correction

Affirmation A : on a directement que :

$$\begin{aligned} \ln(2+2) &= \ln(2\times 2) \\ &\underset{\ln(a\times b)=\ln(a)+\ln(b)}{=} \ln(2)+\ln(2) \end{aligned}$$

Affirmation B : on a directement que :

$$\begin{aligned} \ln\left(3+\frac{3}{2}\right) &= \ln\left(3\left(1+\frac{1}{2}\right)\right) \\ &\underset{\ln(a\times b)=\ln(a)+\ln(b)}{=} \ln(3)+\ln\left(1+\frac{1}{2}\right) \\ &= \ln(3)+\ln\left(\frac{3}{2}\right) \end{aligned}$$

Affirmation C : on a directement que :

$$\begin{aligned} \ln\left(4+\frac{4}{3}\right) &= \ln\left(4\left(1+\frac{1}{3}\right)\right) \\ &\underset{\ln(a\times b)=\ln(a)+\ln(b)}{=} \ln(4)+\ln\left(1+\frac{1}{3}\right) \\ &= \ln(4)+\ln\left(\frac{4}{3}\right) \end{aligned}$$

Affirmation D : on a directement que :

$$\begin{aligned} \ln\left(5+\frac{5}{4}\right) &= \ln\left(5\left(1+\frac{1}{4}\right)\right) \\ &\underset{\ln(a\times b)=\ln(a)+\ln(b)}{=} \ln(5)+\ln\left(1+\frac{1}{4}\right) \\ &= \ln(5)+\ln\left(\frac{5}{4}\right) \end{aligned}$$

Affirmation E : on a directement que :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}\setminus\{1\},\ x+\frac{x}{x-1} &= \frac{x(x-1)}{x-1}+\frac{x}{x-1} \\ &= \frac{x(x-1)+x}{x-1} \\ &= \frac{x^2-x+x}{x-1} \\ &= \frac{x^2}{x-1} \\ &= \frac{x\times x}{x-1} \\ &= x\times\frac{x}{x-1} \end{aligned}$$

Exercice| [5000] | 2| Résolution d'un système 4×4

À l'aide de sa représentation matricielle, déterminer les solutions du système $(\mathcal{S})$ suivant d'inconnue le quadruplet de réels (x, y, z, t) :

$$(\mathcal{S}) : \quad \begin{cases} x + y - \ z - \ t = 1 \\ x + y + \ z - 2t = 3 \\ 2x - y + 2z - \ t = 2 \\ 3x \quad + 3z - 3t = 5 \end{cases}$$

Éléments de correction

La représentation matricielle du système $(\mathbb{S})$ est donc :

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -2 & 3 \\ 2 & -1 & 2 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 3 & -3 & 5 \end{array}\right)$$

On commence par échelonner, par l'algorithme de Gauss, la matrice augmentée afin de déterminer le rang du système et son éventuelle compatibilité :

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -2 & 3 \\ 2 & -1 & 2 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 3 & -3 & 5 \end{array}\right) \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 1L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 3L_1}}{\sim_L} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 6 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

$$\underset{L_2 \leftrightarrow L_3}{\sim_L} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & 6 & 0 & 2 \end{array}\right) \underset{L_4 \leftarrow L_4 - 1L_2}{\sim_L} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 2 \end{array}\right)$$

$$\underset{L_4 \leftarrow L_4 - 1L_3}{\sim_L} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Il y a 3 pivots non nuls. Le rang du système est donc 3.
Le système présente une équation de compatibilité :

$$\left\{ \ 0 \ = \ 0 \qquad \text{Relation vérifiée} \right.$$

Le système est compatible et on poursuit l'échelonnement.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_3 \\ L_1 \leftarrow L_1 + \frac{1}{2}L_3}}{\sim_L} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & -\frac{3}{2} & 2 \\ 0 & -3 & 0 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\underset{L_1 \leftarrow L_1 + \frac{1}{3}L_2}{\sim_L} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{2}{3} \\ 0 & -3 & 0 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \underset{\substack{L_2 \leftarrow -\frac{1}{3}L_2 \\ L_3 \leftarrow \frac{1}{2}L_3}}{\sim_L} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -1 & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

On en déduit alors les relations entre les inconnues x, y, z et t :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x & = & \dfrac{2}{3} + \dfrac{1}{2}t \\ y & = & \dfrac{4}{3} + t \\ z & = & 1 + \dfrac{1}{2}t \end{array} \right. , t \in \mathbb{R}$$

et par suite l'ensemble des solutions de $(\mathcal{S})$ est :

$$\left\{ \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{2}t, \frac{4}{3} + t, 1 + \frac{1}{2}t, t \right), t \in \mathbb{R} \right\}$$

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

Exercice| [4999] | 3| Encore un coup de Twitter

L'égalité suivante est-elle correcte ?

$$\left(\frac{56+\sqrt{\frac{84\,640}{27}}}{2}\right)^{\frac{1}{3}}+\left(\frac{56-\sqrt{\frac{84\,640}{27}}}{2}\right)^{\frac{1}{3}}=4$$

Éléments de correction

En élevant au cube le membre de droite, il vient :

$$\begin{aligned}
&\left(\left(\frac{56+\sqrt{\frac{84\,640}{27}}}{2}\right)^{\frac{1}{3}}+\left(\frac{56-\sqrt{\frac{84\,640}{27}}}{2}\right)^{\frac{1}{3}}\right)^{3}\\
=\ &\frac{56+\sqrt{\frac{84\,640}{27}}}{2}\\
&+3\times\left(\left(\frac{56+\sqrt{\frac{84\,640}{27}}}{2}\right)^{\frac{1}{3}}\right)^{2}\times\left(\frac{56-\sqrt{\frac{84\,640}{27}}}{2}\right)^{\frac{1}{3}}\\
&+3\left(\frac{56+\sqrt{\frac{84\,640}{27}}}{2}\right)^{\frac{1}{3}}\times\left(\left(\frac{56-\sqrt{\frac{84\,640}{27}}}{2}\right)^{\frac{1}{3}}\right)^{2}\\
&+\frac{56-\sqrt{\frac{84\,640}{27}}}{2}\\
=\ &56+3\times\left(\left(\frac{56+\sqrt{\frac{84\,640}{27}}}{2}\right)^{\frac{1}{3}}\right)^{2}\times\left(\frac{56-\sqrt{\frac{84\,640}{27}}}{2}\right)^{\frac{1}{3}}\\
&+3\left(\frac{56+\sqrt{\frac{84\,640}{27}}}{2}\right)^{\frac{1}{3}}\times\left(\left(\frac{56-\sqrt{\frac{84\,640}{27}}}{2}\right)^{\frac{1}{3}}\right)^{2}
\end{aligned}$$

Or on a :

$$\begin{aligned}
&\left(\left(\frac{56+\sqrt{\frac{84\,640}{27}}}{2}\right)^{\frac{1}{3}}\right)^2 \times \left(\frac{56-\sqrt{\frac{84\,640}{27}}}{2}\right)^{\frac{1}{3}} \\
= &\left(\frac{56+\sqrt{\frac{84\,640}{27}}}{2}\right)^{\frac{1}{3}} \times \left(\frac{56+\sqrt{\frac{84\,640}{27}}}{2}\right)^{\frac{1}{3}} \times \left(\frac{56-\sqrt{\frac{84\,640}{27}}}{2}\right)^{\frac{1}{3}} \\
= &\left(\frac{56+\sqrt{\frac{84\,640}{27}}}{2}\right)^{\frac{1}{3}} \times \left(\left(\frac{56+\sqrt{\frac{84\,640}{27}}}{2}\right) \times \left(\frac{56-\sqrt{\frac{84\,640}{27}}}{2}\right)\right)^{\frac{1}{3}} \\
= &\left(\frac{56+\sqrt{\frac{84\,640}{27}}}{2}\right)^{\frac{1}{3}} \times \left(\frac{56^2-\frac{84\,640}{27}}{4}\right)^{\frac{1}{3}}
\end{aligned}$$

et sur le même principe :

$$\left(\left(\frac{56+\sqrt{\frac{84\,640}{27}}}{2}\right)^{\frac{1}{3}}\right)^2 \times \left(\frac{56-\sqrt{\frac{84\,640}{27}}}{2}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{56-\sqrt{\frac{84\,640}{27}}}{2}\right)^{\frac{1}{3}} \times \left(\frac{56^2-\frac{84\,640}{27}}{4}\right)^{\frac{1}{3}}$$

Par ailleurs, il vient que :

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{56+\sqrt{\frac{84\,640}{27}}}{2}\right)^{\frac{1}{3}} \times \left(\frac{56^2-\frac{84\,640}{27}}{4}\right)^{\frac{1}{3}} + \left(\frac{56-\sqrt{\frac{84\,640}{27}}}{2}\right)^{\frac{1}{3}} \times \left(\frac{56^2-\frac{84\,640}{27}}{4}\right)^{\frac{1}{3}} \\
= &\left(\frac{56^2-\frac{84\,640}{27}}{4}\right)^{\frac{1}{3}} \times \left(\left(\frac{56+\sqrt{\frac{84\,640}{27}}}{2}\right)^{\frac{1}{3}} + \left(\frac{56-\sqrt{\frac{84\,640}{27}}}{2}\right)^{\frac{1}{3}}\right)
\end{aligned}$$

En notant ainsi $\alpha = \left(\frac{56+\sqrt{\frac{84\,640}{27}}}{2}\right)^{\frac{1}{3}} + \left(\frac{56-\sqrt{\frac{84\,640}{27}}}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$, on en déduit que :

$$\alpha^3 = 56 + 3\underbrace{\left(\frac{56^2-\frac{84\,640}{27}}{4}\right)^{\frac{1}{3}}}_{=\left(\frac{8}{27}\right)^{\frac{1}{3}}} \times \alpha$$

ou encore que α vérifie la relation : $\alpha^3 = 56 + 2\alpha$.
En d'autres termes, α est une solution réelle de l'équation (E) : $x^3 = 2x + 56$.
La fonction $f : x \longmapsto x^3 - 2x - 56$ est clairement définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$
Par ailleurs, on a : $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = 3x^2 - 2$

Il s'agit donc d'une expression du second degré qui s'annule en $\pm\sqrt{\frac{2}{3}}$.

On en déduit ainsi le signe de $f'(x)$ et les variations de f sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$		$-\sqrt{\frac{2}{3}}$		$\sqrt{\frac{2}{3}}$		0		5		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	0		$+$				
Variations de f		↗	$\approx -54,9$	↘	$\approx -57,1$	↗	-56	↗	59	↗	

Par ailleurs, on a :

- la fonction f est continue sur $[0;5]$
- la fonction f est strictement croissante sur $[0;5]$
- $f(0) \times f(5) < 0$

donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires pour les fonctions strictement monotone, la fonction f s'annule une unique fois sur l'intervalle $[0;5]$, c'est à dire que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique sur solution sur $[0;5]$, et donc sur $\mathbb{R}$ compte-tenu des variations de f.

Or, un calcul direct donne que :
$$\begin{aligned} f(4) &= 4^3 - 2 \times 4 - 56 \\ &= 64 - 8 - 56 \\ &= 0 \end{aligned}$$
et par conséquent, 4 le seul réel qui est solution de l'équation $x^3 = 56 + 2x$, ce qui assure donc que $\alpha = 4$, et par suite, l'égalité proposée est vraie.