Consignes générales | Important

On attachera une **grande importance à la rédaction des réponses**, résoudre un exercice de mathématiques ne consiste nullement à produire un enchaînement ou enchevêtrement d'écritures algébriques sans explications ou commentaires. La longueur d'une réponse n'a rien à voir avec la longueur de la question... **On fera donc apparaître tous les résultats et raisonnements intermédiaires qui ont permis d'aboutir à la solution**.

Dans le cas où un(e) étudiant(e) repère ce qui lui semble être une **erreur d'énoncé**, il (elle) le signale très rapidement au **professeur**.

Travailler les fondamentaux

EX. 1 | Réf. 4620

1. Déterminer $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-1, -\frac{1}{2}\right\}, \ \frac{1}{(1+x)(1+2x)} = \frac{a}{1+x} + \frac{b}{1+2x}$

2. Former alors le développement en série entière en 0 de la fonction $f : x \longmapsto \frac{1}{(1+x)(1+2x)}$ pour lequel on précisera alors le rayon de convergence.

EX. 2 | Réf. 4619

On considère la série entière de la variable réelle $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{4n^2-1} x^{2n}$.

1. Déterminer le rayon de convergence R de cette série entière.

2. On désigne alors par S la fonction somme de cette série entière sur l'intervalle $]-R;R[$ et on rappelle que :

$$\forall x \in \left]-1;1\right[, \ \arctan(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$$

a. Déterminer $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N}, \ \frac{1}{4n^2-1} = \frac{a}{2n+1} + \frac{b}{2n+1}$.

b. En déduire alors une expression de S à l'aide des fonctions usuelles.

Préparation à l'oral

EX. 3 | Réf. 4621

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle telle que : $\forall n \in \mathbb{N}, \ a_n \neq 0$.

On suppose par ailleurs que $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ tend vers une limite ℓ finie où $\ell \in \left]0;+\infty\right[$.

Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^{2n}$

Mobiliser toutes ses connaissances

EX. 4 | Réf. 4622

Soit $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $\begin{cases} w_0 = 0 \\ w_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, w_{n+2} = w_{n+1} + w_n \end{cases}$

1. Déterminer le terme général de la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en fonction de n.

2. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\sum w_n x^n$.

3. Montrer que : $\forall x \in \left]-R;R\right[, \ \left(1-x-x^2\right) \sum_{n=0}^{+\infty} w_n x^n = x$.

En déduire alors la fonction somme de la série entière $\sum w_n x^n$.

Pour s'occuper les jours de pluies

EX. 5 | Réf. 4341

On se propose d'établir la convergence et de calculer la somme de la série numérique $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2}$.

Pour toute la suite de l'exercice, on définit la suite $(a_n)_{n\geq 1}$ par : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \frac{1}{1^2+2^2+\ldots+n^2}$.
On rappelle par ailleurs que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

et admet que : $\quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{1}{n(n+1)(2n+1)} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} - \frac{4}{2n+1}$.

1. Établir la convergence de la série numérique $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2}$.
2. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\sum a_n x^n$.
3. On désigne par S la somme de la série entière $\sum a_n x^n$, c'est à dire : $\quad \forall x \in]-R;R[, \quad S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$.
   - **a.** Donner une expression de $S(x)$ à l'aide des séries entières $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n+1}$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{2n+1}$.
   - **b.** Montrer que : $\quad \forall x \in]0;1[, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n+1} = \frac{1}{x}\left(-\ln(1-x) - x\right)$.
   - **c.** À l'aide de la série entière $\sum x^{2n}$, montrer que : $\quad \forall x \in]-1;1[, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$.
   - **d.** En déduire que pour tout $0 < x < 1, \quad S(x) = 18 - \frac{6}{x}\left((1+\sqrt{x})^2 \ln(1+\sqrt{x}) + (1-\sqrt{x})^2 \ln(1-\sqrt{x})\right)$
   - **e.** Quelle est alors la limite de S lorsque x tend vers 1 par valeur inférieure à 1 ?