Important

On attachera une **grande importance à la rédaction des réponses**, résoudre un exercice de mathématiques ne consiste nullement à produire un enchaînement ou enchevêtrement d'écritures algébriques sans explications ou commentaires. La longueur d'une réponse n'a rien à voir avec la longueur de la question... **On fera donc apparaître tous les résultats et raisonnements intermédiaires qui ont permis d'aboutir à la solution**.

Dans le cas où un(e) étudiant(e) repère ce qui lui semble être une **erreur d'énoncé**, il (elle) le signale très rapidement au **professeur**.

Un peu de technique

Exercice| [5010] | 1| Application linéaire

Soient $u = (1, 1, 1)$ et $v = (2, -1, -1)$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$.
On considère alors l'application f donnée par :

$$f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ x = (x_1, x_2, x_3) & \longmapsto & (x_1 - 2x_2 + x_3)\, u + (x_1 + x_2 - x_3)\, v \end{array} \right.$$

(1). Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.

(2). Déterminer la matrice A de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

(3). f est-il un automorphisme ?

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

Exercice| [2667] | 2| Polynômes d'interpolation de Lagrange

On se propose de déterminer dans cet exercice le(s) polynôme(s) P de degré 2 qui satisfont à la condition suivante :

$$(\star) : \left\{ \begin{array}{ccc} P(x_0) & = & y_0 \\ P(x_1) & = & y_1 \\ P(x_2) & = & y_2 \end{array} \right. \quad \text{où } (x_0, x_1, x_2, y_0, y_1, y_2) \in \mathbb{R}^6$$

autrement dit dont la courbe représentative passe par trois points donnés du plan.

(1). Détermination par résolution de système : soit P le polynôme de degré donné par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P(x) = ax^2 + bx + c \text{ où } (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$$

Déterminer le triplet $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ pour que le polynôme P satisfasse à la condition

$$(\star_0) : \left\{ \begin{array}{ccc} P(-2) & = & 3 \\ P(1) & = & -2 \\ P(5) & = & 2 \end{array} \right.$$

(2). Mise en place de la méthode d'interpolation de Lagrange : on cherche dans cette question à déterminer le(s) polynôme(s) P de degré 2 qui satisfont à la condition

$$(\star_1) : \left\{ \begin{array}{ccc} P(-1) & = & -1 \\ P(2) & = & 3 \\ P(4) & = & 6 \end{array} \right.$$

(a). Déterminer le triplet $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ pour que le polynôme P donné par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P(x) = \alpha(x-2)(x-4) + \beta(x+1)(x-4) + \gamma(x+1)(x-2)$$

satisfasse à $(\star_1)$.
En donner ensuite son expression développée.

(b). En s'inspirant de la question précédente, déterminer un polynôme Q de degré 2 qui satisfait à la condition suivante :

$$(\star_2) : \left\{ \begin{array}{rcl} Q(2) & = & -3 \\ Q(-5) & = & 1 \\ Q(-3) & = & -1 \end{array} \right.$$

En donner ensuite son expression développée.

(3). Formule d'interpolation de Lagrange : soit P un polynôme de degré 2 donné par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P(x) = \alpha\,(x - x_0)\,(x - x_1) + \beta\,(x - x_0)\,(x - x_2) + \gamma\,(x - x_1)\,(x - x_2)$$

et satisfaisant à la condition

$$(\star) : \left\{ \begin{array}{rcl} P\,(x_0) & = & y_0 \\ P\,(x_1) & = & y_1 \\ P\,(x_2) & = & y_2 \end{array} \right.$$

où $(x_0, x_1, x_2, y_0, y_1, y_2) \in \mathbb{R}^6$ est donné et tel que les points (x_0, y_0), (x_1, y_1) et (x_2, y_2) ne sont pas alignés.

(a). Déterminer α, β et γ en fonction de $(x_0, x_1, x_2, y_0, y_1, y_2) \in \mathbb{R}^6$.

(b). Donner alors l'expression développée du polynôme R satisfaisant à la condition $(\star_3) : \left\{ \begin{array}{rcl} R(-3) & = & 2 \\ R(2) & = & -1 \\ R(4) & = & 7 \end{array} \right.$.

(4). Extension à un polynôme de degré 3 : en s'inspirant des questions précédentes et des formules de Lagrange établies pour un polynôme de degré 2, déterminer un polynôme S de degré 3 qui satisfait à la condition

$$(\star_4) : \left\{ \begin{array}{rcl} S(-5) & = & 1 \\ S(-3) & = & -2 \\ S(2) & = & 1 \\ S(4) & = & 5 \end{array} \right.$$

et dont on donnera ensuite la forme développée.