Éléments de correction

Les indications qui suivent ne sont là que pour vous aider à démarrer la résolution des situations proposées. Elles sont énoncées en s'appuyant sur les éléments développés en cours. D'autres solutions ou pistes de résolution sont bien évidemment possibles et vous êtes vivement encouragés à les mener jusqu'au bout. Si certains points du devoir restent délicats à mettre en oeuvre, n'hésitez pas à me solliciter, ou même à en discuter avec vos camarades, de tels échanges étant très souvent bénéfiques!

Il est peu pertinent et presque inutile de s'approprier sans réflexion le travail d'un autre puisque de toute façon, la sanction tombera d'elle même lors des évaluations en classe en temps limité.

Un peu de technique

EX. 1 | Réf. 3073

L'espace $\mathcal{E}$ est rapporté à un repère orthonormé direct $\mathcal{R} = \left(O\,;\,\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$ et les coordonnées des points et vecteurs seront données dans ce dernier.

1. On considère les trois vecteurs $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}-3\\-1\\2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{w}\begin{pmatrix}3\\3\\1\end{pmatrix}$.

- **a.** Montrer que la famille $\mathcal{B} = \left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}\right)$ est une base de vecteurs de l'espace.
- **b.** Déterminer trois réels α, β, γ tels que $\overrightarrow{t} = \alpha\overrightarrow{u} + \beta\overrightarrow{v} + \gamma\overrightarrow{w}$ où $\overrightarrow{t}\begin{pmatrix}5\\-3\\3\end{pmatrix}$.

2.
- **a.** Soit $\mathcal{P}$ le plan passant par $A\,(1,1,1)$ et dirigé par les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.
  Montrer qu'une équation cartésienne de $\mathcal{P}$ est : $x - y + z - 1 = 0$
- **b.** Calculer la distance du point $B\,(1,3,-1)$ au plan $\mathcal{P}$.

EX. 1 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 3073

1.
- **a.** Penser au déterminant de trois vecteurs qui permet de vérifier si trois vecteurs forment une base de l'espace.
- **b.** Écrire la relation qui définit $\overrightarrow{t}$ sous forme d'un système, puis le résoudre.

2.
- **a.** On peut par exemple chercher un vecteur normal au plan $\mathcal{P}$ à l'aide du produit vectoriel des deux vecteurs directeurs donnés.
- **b.** On utilise la formule de calcul de distance d'un point à un plan.

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

EX. 2 | Réf. 2076

On se propose dans cet exercice de calculer la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{2}{k(k+3)}\right)$, où $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Vérifier par le calcul que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\quad 1 + \dfrac{2}{k(k+3)} = \dfrac{k^2+3k+2}{k(k+3)}$.

2. Factoriser le polynôme $k^2 + 3k + 2$.

3. Exprimer sous forme d'une somme $\ln\left(1 + \dfrac{2}{k(k+3)}\right)$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.
On pourra utiliser la factorisation du polynôme $k^2 + 3k + 2$.

4. Calculer alors $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{2}{k(k+3)}\right)$.
On pourra faire apparaître un téléscopage de termes.

EX. 2 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf . 2076

1. On réduit au même dénominateur.
2. C'est un polynôme de degré 2 en $k \in \mathbb{N}$...
3. Utiliser les propriétés opératoires du logarithme en utilisant les deux premières questions.
4. Il y a une somme téléscopique à faire apparaître PROPREMENT et des changements d'indices éventuelllement.