Éléments de correction

Les indications qui suivent ne sont là que pour vous aider à démarrer la résolution des situations proposées. Elles sont énoncées en s'appuyant sur les éléments développés en cours. D'autres solutions ou pistes de résolution sont bien évidemment possibles et vous êtes vivement encouragés à les mener jusqu'au bout. Si certains points du devoir restent délicats à mettre en oeuvre, n'hésitez pas à me solliciter, ou même à en discuter avec vos camarades, de tels échanges étant très souvent bénéfiques!

Il est peu pertinent et presque inutile de s'approprier sans réflexion le travail d'un autre puisque de toute façon, la sanction tombera d'elle même lors des évaluations en classe en temps limité.

Un peu de technique

EX. 1 | Réf. 2131

Mettre sous forme échelonné réduite les deux systèmes suivants, puis en donner les solutions.

$$\mathcal{S}_1 : \begin{cases} 2x+y+2z=1 \\ x-y-2z=2 \\ 4x-y-z=3 \end{cases} \quad \text{et} \quad \mathcal{S}_2 : \begin{cases} x+2y+3z-2t=6 \\ 2x-3y+2z+t=-8 \\ 2x-y-2z-3t=8 \\ 3x+2y-z+2t=4 \end{cases}$$

On pourra travailler avec leur écriture matricielle.

EX. 1 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 2131

- On procède à une échelonnement pour identifier pivots, rang et inconnues principales/secondaires.
- On poursuit l'échelonnement pour en déduire les solutions.

EX. 2 | Réf. 2146

Soit (Δ) la droite passant par $A(1,0,1)$ et dirigée par $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. On note B le point de coordonnées $(2,-1,2)$.

1. Déterminer une équation cartésienne du plan $(\mathcal{P})$ perpendiculaire à (Δ) et passant par B.

2. En déduire le projeté orthogonal, noté H, du point B sur (Δ).

3. Déterminer une équation cartésienne du plan $(\mathcal{Q})$ passant par A, B et H.

4. Les droites (Δ) et $(\mathcal{D})$: $\begin{cases} x-2z+4=0 \\ x+y-z=0 \end{cases}$ sont-elles coplanaires ?

EX. 2 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 2146

1. Rechercher un vecteur normal à $\mathcal{P}$...

2. Il s'agit en fait de chercher l'intersection de $\mathcal{P}$ et Δ.

3. Le plan $\mathcal{Q}$ est défini par trois points, donc on connaît un point et un couple de vecteurs directeurs.

4. Les droites sont-elles parallèles ? Sinon, se coupent-elles ?

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

EX. 3 | Réf. 2380

1. Montrer que l'ensemble $\mathcal{S}$ des points $M(x,y,z)$ tels que :

$$x^2+y^2+z^2-4x+2z+1=0$$

est une sphère de l'espace dont on déterminera le centre Ω et le rayon R.

2. Montrer que le point $A(2,2,-1)$ appartient à $\mathcal{S}$ et déterminer une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}_1$ tangent à $\mathcal{S}$ au point A.

3. **a.** Montrer que le plan $\mathcal{P}_2$ d'équation $x+y-z-1=0$ coupe $\mathcal{S}$.

b. Déterminer le rayon r du cercle $\mathcal{C}$ d'intersection de $\mathcal{P}_2$ avec $\mathcal{S}$.

c. Déterminer les coordonnées du point Ω', centre de $\mathcal{C}$.

EX. 3 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 2380

1. Utiliser les identités remarquables $(a \pm b)^2$ pour factoriser cette expression.

2. Vérifier que les coordonnées de A satisfont à l'équation de $\mathcal{S}$, puis déterminer un vecteur normal au plan recherché.

3. **a.** À quelle condition un plan et une sphère se coupent-ils ?

b. Faire un schéma en coupe pour voir les grandeurs à déterminer.

c. Même remarque.