Éléments de correction

Les indications qui suivent ne sont là que pour vous aider à démarrer la résolution des situations proposées. Elles sont énoncées en s'appuyant sur les éléments développés en cours. D'autres solutions ou pistes de résolution sont bien évidemment possibles et vous êtes vivement encouragés à les mener jusqu'au bout. Si certains points du devoir restent délicats à mettre en oeuvre, n'hésitez pas à me solliciter, ou même à en discuter avec vos camarades, de tels échanges étant très souvent bénéfiques!

Il est peu pertinent et presque inutile de s'approprier sans réflexion le travail d'un autre puisque de toute façon, la sanction tombera d'elle même lors des évaluations en classe en temps limité.

Un peu de technique

EX. 1 | Réf. 2313

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $(\star)$: $z^2 - 3\mathrm{i}\,z - 3 + \mathrm{i} = 0$

EX. 1 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 2313

- On reconnaît une équation de degré 2 à coefficients dans $\mathbb{C}$;
- On calcule son discriminant Δ ;
- On cherche δ tel que $\delta^2 = \Delta$ avec la méthode vue en cours.
- On met en forme les solutions.

EX. 2 | Réf. 1788

Résoudre dans $\mathbb{C}$ le système d'inconnues u et v : $\begin{cases} 3u - v = 34 \\ u - 2v = 3 - 10\mathrm{i} \end{cases}$.

On donnera les solutions sous leur forme algébrique.

EX. 2 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 1788

- Il s'agit d'un système linéaire 2×2 dont les inconnues sont complexes, ainsi que le second membre.
- On le résout à l'aide de l'algorithme de Gauss, en tenant compte que l'on travaille dans $\mathbb{C}$.

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

EX. 3 | Réf. 2314

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $c_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos\left(\frac{\pi}{3}k + \frac{\pi}{4}\right)$ et $s_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sin\left(\frac{\pi}{3}k + \frac{\pi}{4}\right)$.

1. Calculer $\left|1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{\pi}{3}}\right|^2$.
2. Calculer $c_n + \mathrm{i}\,s_n$, puis en déduire l'expression de c_n et de s_n.
3. On suppose que $c_n \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Simplifier $t_n = \dfrac{s_n}{c_n}$.

EX. 3 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 2314

- On repasse à l'écriture trigonométrique pour en calculer son module, ou alors on utiliser la factorisation de $1 \pm \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}$, ou encore calculer $z \times \overline{z}$ avec $z = 1 - \mathrm{e}^{2\mathrm{i}}$.
- Remarquer que $c_n + \mathrm{i}\,s_n$ conduira à $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{\,i\theta}$ avec θ à identifier.
- On obtient alors une somme du type $\displaystyle\sum_{k=\dots}^{\dots} q^k$.
- Arranger au mieux l'expression obtenue à l'aide de termes du type $1 \pm \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}$ où l'on utilisera ensuite la factorisation de cette expression.
- On revient à c_n et s_n en remarquant que c_n et s_n sont respectivement les parties réelle et imaginaire de la somme précedente.