Éléments de correction

Les indications qui suivent ne sont là que pour vous aider à démarrer la résolution des situations proposées. Elles sont énoncées en s'appuyant sur les éléments développés en cours. D'autres solutions ou pistes de résolution sont bien évidemment possibles et vous êtes vivement encouragés à les mener jusqu'au bout. Si certains points du devoir restent délicats à mettre en oeuvre, n'hésitez pas à me solliciter, ou même à en discuter avec vos camarades, de tels échanges étant très souvent bénéfiques!

Il est peu pertinent et presque inutile de s'approprier sans réflexion le travail d'un autre puisque de toute façon, la sanction tombera d'elle même lors des évaluations en classe en temps limité.

Un peu de technique

EX. 1 | Réf. 4612

On souhaite étudier la convergence de la série $\sum u_n$ où $u_n = \dfrac{(-1)^n}{2n+1}$.

1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = (-1)^n \displaystyle\int_0^1 t^{2n}\,\mathrm{d}t$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer un réel r_n tel que : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t + r_n$.
3. Montrer que la suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ainsi définie converge vers 0.
4. En déduire que la série $\sum u_n$ est convergente et déterminer sa somme.

EX. 1 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 4612

1. Le calcul de l'intégrale proposé est direct et donnera le résultat.
2. On utilisera la linéarité de l'intégrale ainsi que la formule donnant la somme des termes d'une suite géométrique pour obtenir le terme en $\dfrac{1}{1+t^2}$ et la valeur de r_n.
3. En majorant l'intégrande définissant r_n et en utilisant la croissance de l'intégrale, on obtiendra que $|r_n| \leq \dfrac{1}{2n+3}$ ce qui permettra de conclure.
4. La relation établie précédemment permet d'obtenir la limite de la suite des sommes partielles.

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

EX. 2 | Réf. 1396

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose, sous réserve de convergence, $I_n = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^n}\,\mathrm{d}x$.

1. Montrer que l'intégrale I_1 est divergente.
2. Montrer, grâce à une intégration par partie, que l'intégrale I_n est convergente pour $n \geq 2$ et calculer sa valeur.
3. Démontrer que pour tout $k \geq 3$, on a l'inégalité $\dfrac{\ln(k)}{k^2} \leq \displaystyle\int_{k-1}^{k} \frac{\ln(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$.
4. En déduire la convergence de la série $\displaystyle\sum_{k\geq 2} \frac{\ln(k)}{k^2}$.

EX. 2 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 1396

1. Une intégration par parties donne la réponse...
2. On se laisse guider...
3. Penser à utiliser la croissance de l'intégrale...
4. Le théorème de comparaison des séries à termes positifs est la clé...