Éléments de correction

Les indications qui suivent ne sont là que pour vous aider à démarrer la résolution des situations proposées. Elles sont énoncées en s'appuyant sur les éléments développés en cours. D'autres solutions ou pistes de résolution sont bien évidemment possibles et vous êtes vivement encouragés à les mener jusqu'au bout. Si certains points du devoir restent délicats à mettre en oeuvre, n'hésitez pas à me solliciter, ou même à en discuter avec vos camarades, de tels échanges étant très souvent bénéfiques!

Il est peu pertinent et presque inutile de s'approprier sans réflexion le travail d'un autre puisque de toute façon, la sanction tombera d'elle même lors des évaluations en classe en temps limité.

Je m'entraîne à rédiger

EX. 1 | Réf. 4340

On définit l'application $\langle \bullet \,|\bullet \rangle$ sur $\mathbb{R}_2[X] \times \mathbb{R}_2[X]$ par :

$$\langle \bullet \,|\bullet \rangle : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] \times \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (P,Q) & \longmapsto & P(0) \times Q(0) + P'(0) \times Q'(0) + P''(0) \times Q''(0) \end{array} \right.$$

Montrer que $\langle \bullet \,|\bullet \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_2[X]$.

EX. 1 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 4340

- La symétrie ne posera pas de problème.
- La linéarité à gauche repose sur le caractère linéaire de la dérivation et de l'évalution d'une fonction en un point.
- Le caractère positif ne posera pas problème.
- Le caractère défini utilisera le fait que le polynôme possèdera 0 comme racine...simple ? double ? triple ? plus ? et donc que P est divisible par...

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

EX. 2 | Réf. 4341

On se propose d'établir la convergence et de calculer la somme de la série numérique $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2}$.

Pour toute la suite de l'exercice, on définit la suite $(a_n)_{n\geq 1}$ par : $\forall n \in \mathbb{N},\quad a_n = \dfrac{1}{1^2+2^2+\ldots+n^2}$.

On rappelle par ailleurs que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\quad \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

et admet que : $\quad \forall n \in \mathbb{N}^*,\quad \dfrac{1}{n(n+1)(2n+1)} = \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n+1} - \dfrac{4}{2n+1}$.

1. Établir la convergence de la série numérique $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2}$.

2. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\sum a_n x^n$.

3. On désigne par S la somme de la série entière $\sum a_n x^n$, c'est à dire : $\quad \forall x \in \left]-R;R\right[,\quad S(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$.

a. Donner une expression de $S(x)$ à l'aide des séries entières $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n+1}$ et $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{2n+1}$.

b. Montrer que : $\quad \forall x \in \left]0;1\right[,\quad \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n+1} = \frac{1}{x}\left(-\ln(1-x) - x\right)$.

c. À l'aide de la série entière $\sum x^{2n}$, montrer que : $\quad \forall x \in \left]-1;1\right[,\quad \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$.

d. En déduire que pour tout $0 < x < 1$, $\quad S(x) = 18 - \dfrac{6}{x}\left((1+\sqrt{x})^2 \ln(1+\sqrt{x}) + (1-\sqrt{x})^2 \ln(1-\sqrt{x})\right)$

e. Quelle est alors la limite de S lorsque x tend vers 1 par valeur inférieure à 1 ?

EX. 2 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 4341

1. Le théorème d'équivalence des séries numériques à termes positifs non tend les bras ici.
2. On met en oeuvre le critère de d'Alembert pour les séries numériques pour déterminer le rayon de convergence de la série entière demandée.
3. **a.** On utilise le résultat admis du préambule en s'assurant que l'on peut scinder en plusieurs séries $S(x)$.
   b. Il s'agit de retrouver le développement en série entière d'une fonction usuelle.
   c. Penser au théorème de dérivation ou d'intégration termes à termes pour les séries entières.
   d. On mobilise l'ensemble des résultats précédents, en remarquant sur la fin que $1-x=(1+\sqrt{x})\,(1-\sqrt{x})$.
   e. C'est un simple calcul de limite, avec une utilisation d'une croissance comparée pour conclure.

Pour s'occuper les jours de pluies

EX. 3 | Réf. 4342

On désigne par $(\star)$ l'équation différentielle linéaire d'ordre 2 suivante :

$$(\star): \quad x^2y''-x\left(2x^2-1\right)y'-\left(2x^2+1\right)y=0$$

1. Soit $f : x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ définie sur $\mathbb{R}^*$.
   Montrer que f est une solution de $(\star)$ sur chacun des intervalles $]-\infty;0[$ et $]0;+\infty[$.
2. On se propose dans cette question de déterminer les fonctions solutions de $(\star)$ qui sont développables en série entière.
   Soit alors $\sum a_nx^n$ une série entière de rayon de convergence $R>0$ dont on note S la somme, c'est à dire que :
   $$\forall x\in\,]-R;R[,\quad S(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n.$$
   On suppose pour la suite de cette question que la fonction S est solution de $(\star)$ sur $]-R;R[$.
   a. Exprimer pour $x\in\,]-R;R[$, $S'(x)$ et $S''(x)$.
   b. Démontrer que $a_0=0$ et que pour tout entier $n\geq 2$, on a : $\quad a_n=\dfrac{2}{n+1}a_{n-2}$.
   c. Calculer a_2. Plus généralement, que vaut a_n si n est un entier pair ?
   d. Si n est impair, on écrit $n=2p+1$ où $p\in\mathbb{N}$.
   Pour tout entier p supérieur ou égal à 1, exprimer a_{2p+1} en fonction de a_{2p-1}.
   Montrer alors que pour tout entier naturel p : $\quad a_{2p+1}=\dfrac{a_1}{(p+1)!}$.
3. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum_{p\geq 0}\frac{x^{2p+1}}{(p+1)!}$.
4. Donner, sans démonstration, les développements en série entière des fonctions $x\longmapsto \mathrm{e}^{x}$ et $x\longmapsto \mathrm{e}^{x^2}$.
5. On note pour tout réel x, $g(x)=\displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{x^{2p+1}}{(p+1)!}$. Que vaut $g(0)$?
   Exprimer pour tout réel x non nul, $g(x)$ en fonction de e^{x^2} et de x.
6. Préciser la dimension de l'espace vectoriel des solutions sur $]0;+\infty[$ de l'équation différentielle $(\star)$, puis exprimer les solutions de $(\star)$ sur l'intervalle $]0;+\infty[$ à l'aide des fonctions f et g.

EX. 3 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 4342

1. Il suffit d'exprimer les dérivées premières de f et de vérifier que f sataisfait à $(\star)$ sur chacun des deux intervalles demandés.

2. **a.** C'est l'application du théorème de dérivation pour les séries entières.
   b. On injecte dans l'équation différentielle $(\star)$ le développement en série entière de S, S', S'', on réindexe les sommes, on les regroupe et ou utilise l'unicité du développement en série entière pour obtenir les relations demandées.
   c. RAS
   d. Il suffit de manipuler la relation obtenue précédemment dans le cas où $n = 2p + 1$.
3. On utilise le critère de d'Alembert pour les séries numériques.
4. RAS
5. $g(0)$ est immédiat. Pour $g(x)$, on utilise les développements en série entière que l'on vient de rappeler.
6. C'est du cours !