Éléments de réflexion | Pistes de recherche

Les éléments développés ci-après ne sont souvent que des indications pour aboutir à la solution, qui détaillent la plupart du temps un cheminement à suivre pour montrer le rèsultat demandé. La plupart des calculs sont laissés aux lecteurs. . .La mise en forme de certains calculs est faite de sorte à économiser de l'espace et donc du papier, mais il conviendrait de ne pas les écrire en ligne notamment comme cela l'est parfois.

Un peu de technique

EX. 1 | Réf. 2131

Mettre sous forme échelonné réduite les deux systèmes suivants, puis en donner les solutions.

$$\mathcal{S}_1 : \begin{cases} 2x+y+2z=1 \\ x-y-2z=2 \\ 4x-y-z=3 \end{cases} \quad \text{et} \quad \mathcal{S}_2 : \begin{cases} x+2y+3z-2t=6 \\ 2x-3y+2z+t=-8 \\ 2x-y-2z-3t=8 \\ 3x+2y-z+2t=4 \end{cases}$$

On pourra travailler avec leur écriture matricielle.

EX. 1 | Éléments de correction | Réf. 2131

1. Résolution du système $\mathcal{S}_1$ et mise sous forme échelonnée réduite :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 2 \\ 4 & -1 & -1 & 3 \end{array}\right) \underset{L_1 \leftrightarrow L2}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 4 & -1 & -1 & 3 \end{array}\right) \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 4L_1}}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & 6 & -3 \\ 0 & 3 & 7 & -5 \end{array}\right)$$

$$\underset{L_2 \leftarrow \frac{1}{3}L_2}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 7 & -5 \end{array}\right) \underset{L_3 \leftarrow L_3 - 3L_2}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right) \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_3 \\ L_1 \leftarrow L_1 + 2L_3}}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

$$\underset{L_1 \leftarrow L_1 + L_2}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

2. Résolution du système $\mathcal{S}_2$ et mise sous forme échelonnée réduite :

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 & 6 \\ 2 & -3 & 2 & 1 & -8 \\ 2 & -1 & -2 & -3 & 8 \\ 3 & 2 & -1 & 2 & 4 \end{array}\right) \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 3L_1}}{\sim_L} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 & 6 \\ -7 & -4 & 5 & -20 & \\ 0 & -5 & -8 & 1 & -4 \\ 0 & -4 & -19 & 8 & -14 \end{array}\right)$$

$$\underset{L_2 \leftarrow -\frac{1}{7}L_2}{\sim_L} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 & 6 \\ 0 & 1 & \frac{4}{7} & -\frac{5}{7} & \frac{20}{7} \\ 0 & -5 & -8 & -1 & -4 \\ 0 & -4 & -10 & 8 & -14 \end{array}\right) \underset{\substack{L_3 \leftarrow L_3 + 5L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 + 4L_2}}{\sim_L} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 & 6 \\ 0 & 1 & \frac{4}{7} & -\frac{5}{7} & \frac{20}{7} \\ 0 & 0 & -\frac{36}{7} & -\frac{18}{7} & \frac{72}{7} \\ 0 & 0 & -\frac{54}{7} & \frac{36}{7} & -\frac{18}{7} \end{array}\right)$$

$$\underset{\substack{L_3 \leftarrow -\frac{7}{36}L_3 \\ L_4 \leftarrow -\frac{7}{54}L_4}}{\sim_L} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 & 6 \\ 0 & 1 & \frac{4}{7} & -\frac{5}{7} & \frac{20}{7} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{array}\right) \underset{L_4 \leftarrow L_4 - L_3}{\sim_L} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 & 6 \\ 0 & 1 & \frac{4}{7} & -\frac{5}{7} & \frac{20}{7} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{7}{6} & \frac{7}{3} \end{array}\right)$$

$$\underset{L_4 \leftarrow -\frac{6}{7}L_4}{\sim_L} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 & 6 \\ 0 & 1 & \frac{4}{7} & -\frac{5}{7} & \frac{20}{7} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right) \underset{\substack{L_3 \leftarrow L_3 - \frac{1}{2}L_4 \\ L_2 \leftarrow L_2 + \frac{5}{7}L_4 \\ L_3 \leftarrow L_1 + 2L_4}}{\sim_L} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{4}{7} & 0 & \frac{10}{7} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

$$\underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - \frac{4}{7}L_3 \\ L_1 \leftarrow L_1 - 3L_3}}{\sim_L} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right) \underset{L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2}{\sim_L} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

EX. 2 | Réf. 2146

Soit (Δ) la droite passant par $A\,(1,0,1)$ et dirigée par $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}$. On note B le point de coordonnées $(2,-1,2)$.

1. Déterminer une équation cartésienne du plan $(\mathcal{P})$ perpendiculaire à (Δ) et passant par B.

2. En déduire le projeté orthogonal, noté H, du point B sur (Δ).

3. Déterminer une équation cartésienne du plan $(\mathcal{Q})$ passant par A, B et H.

4. Les droites (Δ) et $(\mathcal{D})$: $\left\{\begin{array}{l} x-2z+4=0\\ x+y-z=0\end{array}\right.$ sont-elles coplanaires ?

EX. 2 | Éléments de correction | Réf. 2146

1. $\overrightarrow{u}$ est donc un vecteur normal à $(\mathcal{P})$. Ainsi, une équation de $(\mathcal{P})$ est de la forme $-x+2y+z+d=0$ où l'on détermine d à l'aide des coordonnées de B. On trouve ainsi : $-x_B+2y_B+z_B+d=0$ soit $d=2$. Ainsi, une équation cartésienne de $(\mathcal{P})$ est $-x+2y+z+2=0$.

2. Le projeté orthogonal H de B sur (Δ) est donc le point d'intersection entre $(\mathcal{P})$ et (Δ).

Un paramétrage de (Δ) est clairement $\left\{\begin{array}{l} x=1-t\\ y=2t\\ z=1+t\end{array}\right.$ $,t\in\mathbb{R}$. Ainsi, H est le projeté orthogonal de B sur (Δ) si, et seulement si, il existe $t\in\mathbb{R}$ tel que $\left\{\begin{array}{l} x=1-t\\ y=2t\\ z=1+t\\ (\star):\ -x+2y+z+2=0\end{array}\right.$. La relation $(\star)$ devient : $-(1-t)+2\times 2t+(1+t)+2=0$, soit $6t+2=0$ et donc $t=-\dfrac{1}{3}$.

Par suite, les coordonnées de H sont : $\left\{\begin{array}{l} x_H=1-\left(-\dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{4}{3}\\ y_H=2\times\left(-\dfrac{1}{3}\right)=-\dfrac{2}{3}\\ z_H=1+\left(-\dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{2}{3}\end{array}\right.$.

3. Le plan $(\mathcal{Q})$ est donc déterminé par la donnée du point A, et des deux vecteurs $\overrightarrow{BH}$ et $\overrightarrow{u}$ qui ne sont pas colinéaires, ou encore par les deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{u}$ qui ne le sont pas non plus.

Ainsi, $M\,(x,y,z)\in(\mathcal{Q}) \quad\Leftrightarrow\quad \left[\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AB},\overrightarrow{u}\right]=0$. Or $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-1\\y\\z-1\end{pmatrix}$ et ainsi, on obtient $\left[\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AB},\overrightarrow{u}\right]=-(x-1)+2z-y-(z-1)-2(x-1)-y=-3x-2y+z+2$. Par conséquent, une équation de $(\mathcal{Q})$ est $-3x-2y+z+2=0$.

4. Les droites $(\mathcal{D})$ et (Δ) sont coplanaires lorsqu'elles sont soit sécantes, soit parallèles. Un vecteur directeur de $(\mathcal{D})$ est $\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\\2\\-1\end{pmatrix}1,$, qui n'est clairement pas colinéaire à $\overrightarrow{u}$, et les deux droites ne sont ainsi pas parallèles. Recherchons donc un éventuel point d'intersection entre ces deux droites. Utilisons pour cela le paramétrage précédent de (Δ).

Ainsi, $K\,(x,y,z)\in(\mathcal{D})\cap(\Delta)$ si, et seulement si il existe $t\in\mathbb{R}$ tel que $\left\{\begin{array}{l} x=1-t\\ y=2t\\ z=1+t\\ \left\{\begin{array}{ll} x-2z+4=0 & (\star_1)\\ x+y-z=0 & (\star_2)\end{array}\right.\end{array}\right.$.

La relation $(\star_1)$ devient alors $(1-t)-2(1+t)+4=0$, soit $3-3t=0$ c'est à dire $t=1$.

La relation $(\star_2)$ devient alors $(1-t)+2t-(1+t)=0$, soit $0=0$.

Ainsi, le point de (Δ) de paramètre $t=1$ appartient aussi à $(\mathcal{D})$, et par suite les deux droites sont sécantes, et donc coplanaires.

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

EX. 3 | Réf. 2380

1. Montrer que l'ensemble $\mathcal{S}$ des points $M(x,y,z)$ tels que :

$$x^2+y^2+z^2-4x+2z+1=0$$

est une sphère de l'espace dont on déterminera le centre Ω et le rayon R.

2. Montrer que le point $A(2,2,-1)$ appartient à $\mathcal{S}$ et déterminer une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}_1$ tangent à $\mathcal{S}$ au point A.

3. **a.** Montrer que le plan $\mathcal{P}_2$ d'équation $x+y-z-1=0$ coupe $\mathcal{S}$.

b. Déterminer le rayon r du cercle $\mathcal{C}$ d'intersection de $\mathcal{P}_2$ avec $\mathcal{S}$.

c. Déterminer les coordonnées du point Ω', centre de $\mathcal{C}$.

EX. 3 | Éléments de correction | Réf. 2380

1. On a à l'aide de l'identité remarquable $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$ que :

$$\begin{aligned} M(x,y,z)\in\mathcal{S} \quad &\Leftrightarrow \quad x^2+y^2+z^2-4x+2z+1=0\\ &\Leftrightarrow \quad (x-2)^2-4+y^2+(x+1)^2-1+1=0\\ &\Leftrightarrow \quad (x-2)^2+y^2+(z+1)^2=4 \end{aligned}$$

Ainsi, $\mathcal{S}$ est la sphère de centre $\Omega(2,0,-1)$ et de rayon $R=2$.

2. Les coordonnées de A vérifient l'équation cartésienne de $\mathcal{S}$, donc A appartient à $\mathcal{S}$.
Le plan $\mathcal{P}_1$ tangent à $\mathcal{S}$ au point A est le plan contenant A et de vecteur normal $\overrightarrow{\Omega A}$. On a donc :

$$M(x,y,z)\in\mathcal{P}_1 \quad\Leftrightarrow\quad \overrightarrow{AM}\,.\,\overrightarrow{\Omega A}=0 \quad\Leftrightarrow\quad y-2=0$$

et par suite le plan $\mathcal{P}_1$ admet pour équation cartésienne $y=2$.

3. **a.** Le plan $\mathcal{P}_2$ coupe la sphère $\mathcal{S}$ si, et seulement si, $d=d(\Omega,\mathcal{P}_2)\leq 2$.
Or $d=d(\Omega,\mathcal{P}_2)=\dfrac{|2+0+1-1|}{\sqrt{3}}=\dfrac{2}{\sqrt{3}}<2$, donc l'intersection de $\mathcal{S}$ et $\mathcal{P}_2$ est bien un cercle $\mathcal{C}$.

b. En notant r le rayon du cercle $\mathcal{C}$, d'après le théorème de Pythagore, on a $d^2+r^2=R^2$. Ainsi, on en déduit que $r=\dfrac{2}{3}\sqrt{6}$.

c. Déterminons les coordonnées du point Ω' centre du cercle $\mathcal{C}$. Le point Ω' est le projeté orthogonal du point Ω sur $\mathcal{P}_2$. Soit $\mathcal{D}$ la droite contenant Ω et de vecteur directeur un vecteur normal $\overrightarrow{n}$ au plan $\mathcal{P}_2$. Le point Ω' est le point d'intersection de $\mathcal{D}$ et de $\mathcal{P}_2$. En choisissant $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$, on obtient pour la droite $\mathcal{D}$ le paramétrage

$$\begin{cases} x=2+t\\ y=t\\ z=-1-t \end{cases} \quad \text{où } t\in\mathbb{R}.$$

L'intersection de $\mathcal{D}$ et $\mathcal{P}_2$ est le point de paramètre t vérifiant $(2+t)+t-(-1-t)-1=0$, soit $t=-\dfrac{2}{3}$ et on en déduit que Ω' a pour coordonnées $\left(\dfrac{4}{3},-\dfrac{2}{3},\dfrac{2}{3}\right)$.