## Éléments de réflexion | Pistes de recherche

Les éléments développés ci-après ne sont souvent que des indications pour aboutir à la solution, qui détaillent la plupart du temps un cheminement à suivre pour montrer le rèsultat demandé. La plupart des calculs sont laissés aux lecteurs. . .La mise en forme de certains calculs est faite de sorte à économiser de l'espace et donc du papier, mais il conviendrait de ne pas les écrire en ligne notamment comme cela l'est parfois.

## Un peu de technique

### EX. 1 | Réf. 2313

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $(\star)$ : $z^2 - 3\mathrm{i}\,z - 3 + \mathrm{i} = 0$

### EX. 1 | Éléments de correction | Réf. 2313

Le discriminant $\Delta$ de $(\star)$ vaut : $\Delta = (-3\mathrm{i}) - 4 \times 1 \times (-3 + \mathrm{i}) = 3 - 4\mathrm{i}$.
On cherche alors $\delta = x + \mathrm{i}\,y$ avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\delta^2 = \Delta$.

En remarquant par ailleurs que $\left|\delta^2\right| = |\Delta|$ et $|\delta|^2 = \left|\delta^2\right|$, on obtient le système : $\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ x^2 - y^2 = 3 \\ 2xy = -4 \end{cases}$

La résolution du sous-système $\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ x^2 - y^2 = 3 \end{cases}$ donne : $\begin{cases} x^2 = 4 \\ y^2 = 1 \end{cases}$. Par ailleurs, puisque $2xy = -4$, $x$ et $y$ sont de signe opposé, il vient que $\delta = 2 - \mathrm{i}$ ou $\delta = 2 - \mathrm{i}$. Ainsi, en prenant $\delta = 2 - \mathrm{i}$, il vient que les solutions de $(\star)$ sont $z_1 = \dfrac{3\mathrm{i} + (2 - \mathrm{i})}{2} = 1 + \mathrm{i}$ et $z_2 = \dfrac{3\mathrm{i} - (2 - \mathrm{i})}{2} = -1 + 2\mathrm{i}$

### EX. 2 | Réf. 1788

Résoudre dans $\mathbb{C}$ le système d'inconnues $u$ et $v$ : $\begin{cases} 3u - v = 34 \\ u - 2v = 3 - 10\mathrm{i} \end{cases}$.
*On donnera les solutions sous leur forme algébrique.*

### EX. 2 | Éléments de correction | Réf. 1788

On commence par échelonner, par l'algorithme de Gauss, la matrice augmentée afin de déterminer le rang du système et son éventuelle compatibilité :

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & -1 & 34 \\ 1 & -2 & 3 - 10\mathrm{i} \end{array}\right) \underset{L_2 \leftarrow L_2 - \frac{1}{3}L_1}{\sim_L} \left(\begin{array}{cc|c} 3 & -1 & 34 \\ 0 & -\frac{5}{3} & -\frac{25}{3} - 10\mathrm{i} \end{array}\right)$$
$$\underset{L_1 \leftarrow L_1 - \frac{3}{5}L_2}{\sim_L} \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 0 & 39 + 6\mathrm{i} \\ 0 & -\frac{5}{3} & -\frac{25}{3} - 10\mathrm{i} \end{array}\right) \underset{\substack{L_1 \leftarrow \frac{1}{3}L_1 \\ L_2 \leftarrow -\frac{3}{5}L_2}}{\sim_L} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 13 + 2\mathrm{i} \\ 0 & 1 & 5 + 6\mathrm{i} \end{array}\right)$$

doù $u = 13 + 2\mathrm{i}$ et $v = 5 + 6\mathrm{i}$

## Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

### EX. 3 | Réf. 2314

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $c_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos\left(\frac{\pi}{3}k + \frac{\pi}{4}\right)$ et $s_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sin\left(\frac{\pi}{3}k + \frac{\pi}{4}\right)$.

1. Calculer $\left|1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{\pi}{3}}\right|^2$.
2. Calculer $c_n + \mathrm{i}\,s_n$, puis en déduire l'expression de $c_n$ et de $s_n$.
3. On suppose que $c_n \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Simplifier $t_n = \dfrac{s_n}{c_n}$.

EX. 3 | Éléments de correction | Réf. 2314

**1.** On a en remarquant que $|z|^2 = z \times \overline{z}$ pour tout $z \in \mathbb{C}$, il vient :

$$\begin{aligned} \left|1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}\right|^2 &= \left(1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}\right)\left(1-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}\right) \\ &= 1-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}+1 \\ &= 2-2\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \\ &= 1 \end{aligned}$$

**2.** On commence par remarquer que $c_n \in \mathbb{R}$ et $s_n \in \mathbb{R}$, et donc que $c_n = \mathrm{Re}\,(c_n + \mathrm{i}\, s_n)$ et $s_n = \mathrm{Im}\,(c_n + \mathrm{i}\, s_n)$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ :

$$\begin{aligned} c_n + \mathrm{i}\, s_n &= \sum_{k=0}^{n}\left(\cos\left(k\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)+\mathrm{i}\,\sin\left(k\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)\right) \\ &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(k\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)} \\ &= \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{k\pi}{3}} \\ &= \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}\left(1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}\right)^n \\ &\underset{1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}=2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta}{2}}}{=} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}} \times \left(2\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}\right)^n \\ &= \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}} \times \sqrt{3}^n\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{n\pi}{6}} \\ &= \sqrt{3}^n\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+\mathrm{i}\,\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)\times\left(\cos\left(\frac{n\pi}{6}\right)+\mathrm{i}\,\sin\left(\frac{n\pi}{6}\right)\right) \\ &= \underbrace{\frac{\sqrt{2}\sqrt{3}^n}{2}\left(\cos\left(\frac{n\pi}{6}\right)-\sin\left(\frac{n\pi}{6}\right)\right)}_{c_n} + \mathrm{i}\underbrace{\frac{\sqrt{2}\sqrt{3}^n}{2}\left(\cos\left(\frac{n\pi}{6}\right)+\sin\left(\frac{n\pi}{6}\right)\right)}_{s_n} \end{aligned}$$

**3.** On en déduit alors que :

$$\begin{aligned} t_n &= \frac{\dfrac{\sqrt{2}\sqrt{3}^n}{2}\left(\cos\left(\dfrac{n\pi}{6}\right)+\sin\left(\dfrac{n\pi}{6}\right)\right)}{\dfrac{\sqrt{2}\sqrt{3}^n}{2}\left(\cos\left(\dfrac{n\pi}{6}\right)-\sin\left(\dfrac{n\pi}{6}\right)\right)} \\ &= \frac{\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cos\left(\dfrac{n\pi}{6}\right)+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(\dfrac{n\pi}{6}\right)}{\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cos\left(\dfrac{n\pi}{6}\right)-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(\dfrac{n\pi}{6}\right)} \\ &= \frac{\sin\left(\dfrac{\pi}{4}\right)\cos\left(\dfrac{n\pi}{6}\right)+\cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right)\sin\left(\dfrac{n\pi}{6}\right)}{\cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right)\cos\left(\dfrac{n\pi}{6}\right)-\sin\left(\dfrac{\pi}{4}\right)\sin\left(\dfrac{n\pi}{6}\right)} \\ &= \frac{\sin\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{n\pi}{6}\right)}{\cos\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{n\pi}{6}\right)} \\ &= \tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{n\pi}{6}\right) \end{aligned}$$